Chapitre 1

Intégration sur un intervalle quelconque

Sommaire

Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La lettre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton.
La notation $\mathcal{C}_{\text{pm}}(I,\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1.1 Intégrale d'une fonctions continue par morceaux sur un intervalle de $[a,b[$ ou $]a,b]$

Définition 1

Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b[,\mathbb{K})$ (avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$).

1. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est impropre en b.
2. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ converge (en b) si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^x f$ admet une limite finie lorsque x tend vers b^-.

   Cette limite est alors noté aussi $\displaystyle\int_a^b f$.
3. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ diverge (en b) si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^b f$ n'est pas convergente.

Définition 2

Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}(]a,b],\mathbb{K})$ (avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a=-\infty$).

1. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est impropre en a.
2. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ converge (en a) si, et seulement si, $\displaystyle\int_x^b f$ admet une limite finie lorsque x tend vers a^+.

   Cette limite est alors noté aussi $\displaystyle\int_a^b f$.
3. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ diverge (en a) si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^b f$ n'est pas convergente.

Remarques :

1. Il y a deux types d'intégrales impropres :
   - l'intégrale de fonctions non bornées sur un intervalle borné ($x \mapsto \ln(x)$ sur $]0,1]$)
   - l'intégrale de fonctions continues sur un intervalle non borné ($x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0,+\infty[$).
2. En cas d'intégrale divergente, le symbole $\displaystyle\int_a^b f$ ne désigne pas un nombre.
3. Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}(]a,b],\mathbb{K})$ Par commodité, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ sera parfois noté $\displaystyle\int_{]a,b]} f$.
4. Étudier la nature d'une intégrale revient à justifier si cette dernière est convergente ou divergente.

Exemples :

1. Étudions la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.

   La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est impropre en $+\infty$. Soit $x \in [0,+\infty[$,

   $$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = [\mathsf{Arctan}(t)]_0^x = \mathsf{Arctan}(x) - \mathsf{Arctan}(0) = \mathsf{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

   l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge et

   $$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

2. Étudions la nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$.

   La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0,1]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ est impropre en 0.

   Soit $x \in]0,1]$,

   $$\int_x^1 \ln t \ \mathrm{d}t = [t\ln t - t]_x^1 = x - x\ln x - 1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -1$$

   L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \ln t \ \mathrm{d}t$ converge et

   $$\int_0^1 \ln t \ \mathrm{d}t = -1$$

Exercice E1 : [Intégrales de Bertrand-1]

Pour quelles valeurs de β l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$ converge-t-elle ?

Exercice A2 : Étudier la nature des intégrales suivantes et donner leur valeur dans le cas de convergence :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^2(t)}, \quad \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^2}, \quad \int_0^{\pi} t\sin(t^2)dt, \quad \int_0^{+\infty} 4t^2e^{-t^3}dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+e^{2t}}.$$

Exercice A3 : Déterminer la nature des intégrales suivantes et calculer leurs valeurs le cas échéant.

1. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+t^2}dt$
2. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{4-t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{1-9t^2}}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-3t+2}$

Exercice C4 : [Centrale Maths 1 MP 2015]

Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$ et montrer que sa valeur est $\dfrac{\pi}{2}$.

1.1.1 Intégrale faussement impropre

Théorème 3

Soit $\boxed{\boxed{a \text{ et } b \text{ deux réels}}}$. Soit f une fonction continue sur $]a,b]$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est ainsi impropre en a.
Si f est prolongeable par continuité en a, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ existe et est finie.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente. On dit que f est faussement impropre.

Exercice A5 : Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt, \quad \int_0^1 t^2\ln(t)dt, \quad \int_0^1 \frac{e^t-1}{t}dt$$

Théorème 4

Soit $\boxed{\boxed{a \text{ et } b \text{ deux réels}}}$. Soit f une fonction continue sur $[a,b[$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est ainsi impropre en b.
Si f est prolongeable par continuité en b, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$ existe et est finie.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente. On dit que f est faussement impropre.

Exercice A6 : Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(t)}{1-t}dt, \quad \int_{-1}^0 \frac{e^t-1-t}{t^2}dt.$$

Exercice E7 :

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}dt$.

1. Justifier l'existence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}-I_n$.
3. Calculer I_0. Déterminer l'expression de I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0$.
5. On considère l'application g définie sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ par : $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\quad g(x) = \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin(x)}$. Montrer que g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.
6. En déduire que :
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

1.1.2 Exemples de référence

Théorème 5 (Intégrales de Riemann)

Soit $a \in]0, +\infty[$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Théorème 6 (Intégrales de Riemann)

Soit $b \in]0, +\infty[$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{b} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_{-b}^{0} \frac{dt}{|t|^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Théorème 7 (Intégrales de Riemann)

Soit $a, h \in]0, +\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{a+h} \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_{a-h}^{a} \frac{dt}{(a-t)^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Théorème 8

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ est convergente si, et seulement si, $\lambda > 0$. Dans ce cas :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Théorème 9

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ est convergente et vaut $\sqrt{2\pi}$.

1.2 Intégrale d'une fonctions continue par morceaux sur un intervalle de $]a, b[$

Définition 10

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent pour un réel $c \in]a, b[$ fixé.

Remarque :

1. Il s'agit donc justifier l'existence de limites finies $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \int_x^c f$ et $\displaystyle\lim_{y \to b^-} \int_c^y f$ pour un réel $c \in]a, b[$ fixé.
2. Attention au passage à la limite ! Pour prouver que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge, il ne suffit pas de calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} f$.

Exercice A8 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature des intégrales suivantes et donner leur valeur dans le cas de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

1.3 Propriétés

Proposition 11

Soit $f, g \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b[, \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent alors $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ converge et :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Preuve : Soit $x \in [a, b[$. Intégrons sur le segment $[a, x]$ et faisons tendre x vers b^-

$$\int_a^x (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^x f + \mu \int_a^x g \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g \in \mathbb{R}$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ converge et

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

□

Remarque : Il n'est pas permis d'écrire cette dernière égalité sans avoir justifié au préalable la convergence des trois intégrales. Considérons les trois intégrales :

$$\int_a^b f(t)dt, \quad \int_a^b g(t)dt, \quad \int_a^b (f(t) + g(t))dt.$$

1. Si deux de ces intégrales sont convergentes, la troisième l'est aussi.
2. Si l'une de ces intégrales est convergentes, les deux autres sont de même nature.
3. Si deux de ces intégrales sont divergentes, on ne peut rien dire à priori sur la nature de la troisième.

Proposition 12 (Relation de Chasles)

Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}\left([a,b[,\mathbb{K}\right)$. On suppose que $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente. Alors pour tout $c \in]a,b[$:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Proposition 13

Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}(I,\mathbb{C})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\displaystyle\int_I f$ est convergente.
2. $\displaystyle\int_I \mathsf{Re}(f)$ et $\displaystyle\int_I \mathsf{Im}(f)$ sont convergentes.

Dans ce cas :

$$\int_I f = \int_I \mathsf{Re}(f) + i\int_I \mathsf{Im}(f)$$

Exercice E9 :

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier la convergence et calculer

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t$$

Proposition 14 (Positivité)

Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}(I,\mathbb{K})$. On suppose que $\displaystyle\int_I f$ est convergente et $f \geqslant 0$ sur I alors :

$$\int_I f \geqslant 0.$$

Proposition 15 (Croissance de l'intégrale)

Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}(I,\mathbb{K})$. On suppose que $\displaystyle\int_I f$, $\displaystyle\int_I g$ sont convergentes et $f \leqslant g$ sur I alors :

$$\int_I f \leqslant \int_I g.$$

Théorème 16

Soit f une fonction $\boxed{\text{continue et positive}}$ sur I. On suppose que $\displaystyle\int_I f$ est convergente.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\displaystyle\int_I f = 0$.
2. $\forall t \in I, \quad f(t) = 0$.

Exercice E10 :
Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$

1. Montrer que $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t}\ \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\ \mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur F.
5. Montrer que :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E}, \left| \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)e^{-t}\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} \mathrm{P}^2(t)e^{-t}\ \mathrm{d}t}$$

1.4 Intégrales des fonctions positives

Théorème 17

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive.

1. $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement s'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in [a, b[$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant M$.
2. $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge si et seulement si $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} +\infty$.

   On notera alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = +\infty$.

Preuve : Introduisons la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Pour tout $x \in [a, b[$, $\quad F'(x) = f(x) \geqslant 0$, par conséquent la fonction F est croissante sur $[a, b[$.
D'après le théorème de la limite monotone, F admet une limite en b^- finie si et seulement si F est majorée sur $[a, b[$. □

1.4.1 Comparaison par inégalités, domination, négligeabilité, équivalents

Théorème 18 (de comparaison par majoration)

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur I telles que $0 \leqslant f \leqslant g$.

1. $\displaystyle\int_I g$ converge alors $\displaystyle\int_I f$ converge et alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$
2. Si $\displaystyle\int_I f$ diverge alors $\displaystyle\int_I g$ diverge.

Preuve : Plaçons nous dans le cas où $I = [a, b[$. Supposons que $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, b[$ et que $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge.
La croissance de l'intégrale assure que

$$\forall x \in [a, b[, \quad \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \underbrace{\leqslant}_{g \text{ positive}} \int_a^b g(t)\mathrm{d}t = M$$

Ainsi $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée par M, donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge. Par passage à la limite,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

□

Théorème 19 (de comparaison par domination et négligeabilité)

Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues par morceaux et positives. On suppose $\displaystyle\int_a^b g$ convergente.

1. Domination : Si $f \underset{b^-}{=} \mathrm{O}(g)$ alors $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente.
2. Négligeabilité : Si $f \underset{b^-}{=} \mathrm{o}(g)$ alors $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente.

Remarque : Le théorème précédent s'adapte naturellement au cas d'un intervalle de la forme $]a,b]$. On verra dans la suite que la condition de positivité peut porter uniquement sur g, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ sera alors absolument convergente (paragraphe suivant).

Proposition 20

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur $[a,+\infty[$.
Si $f(t) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ au voisinage de $+\infty$ avec $\alpha > 1$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge (absolument).

Théorème 21

Soit $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur I, de signe constant au voisinage de b, telles que

$$f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$$

Alors, $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont de même nature.

Exercice A11 : Les intégrales suivantes convergent-elles ?

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\sin(x)e^{-x}dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}dx$

Exercice E12 : [Intégrales de Bertrand] Pour quelles valeurs des réels α et β l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge-t-elle ?

Exercice C13 : [Centrale-2016-MP]
Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n = \int_0^\infty \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser la monotonie de la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice C14 : [Mines-Télécom]
On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\,\mathrm{d}t,\quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer l'existence de I et de J et montrer que $J = I$.
2. Calculer $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 - u + 1}\, du$.
3. En considérant $I + J$ donner la valeur de I.

1.4.2 Comparaison série intégrale

Théorème 22 (Comparaison série intégrale)

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f : [p, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, positive et décroissante sur $[p, +\infty[$. Alors :

1. Pour tout entier $n \in [\![p + 1, +\infty [\![$,
$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)dt.$$
2. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant p} f(n)$ est convergente si, et seulement si, $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.
3. Si la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant p} f(n)$ est divergente, on a alors l'équivalent :
$$\sum_{n=p}^{N} f(n) \underset{N \to +\infty}{\sim} \int_p^N f(t)dt.$$

Théorème 23 (Séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.
2. En cas de divergence lorsque $\alpha \leqslant 1$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n) \qquad \text{et} \qquad \forall \alpha \in]0, 1[, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1 - \alpha}$$

Exercice E15 : [Intégrales et fonction ζ de Riemann]

1. Pour $x > 1$, calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\, dt$.
2. Pour $x > 1$, déterminer un encadrement de $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.
3. En déduire un équivalent simple de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1^+.

Exercice E16 : [Somme de Riemann]

1. Soit f continue et monotone sur $]0, 1]$. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 f$ est convergente. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Montrer que S_n tend vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ quand n tend vers ∞.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1.4.3 Nature d'une intégrale en $+\infty$ et limite

Dans le chapitre sur les séries numériques, si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge, $\boxed{\text{ALORS}}$ $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

La convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ implique-t-elle que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$? La réponse est malheureusement négative.

Remarque : Contrairement aux séries, on ne peut rien dire lorsque la limite n'existe pas. En effet, la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ n'implique pas que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On considère la fonction $\delta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\delta : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geqslant 1 \\ x+1 & \text{si } x \in]-1,0] \\ 1-x & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

On définit alors la fonction f par

$$f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} n\delta\left(n^3(x-n)\right)$$

Par définition de la fonction $\delta, \delta\left(n^3(x-n)\right) \neq 0$ si et seulement si $x \in \left[n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}\right]$ ce qui prouve que la série converge car, au plus, un des termes de la série n'est pas nul. La courbe de f est alors :

On en déduit que pour tout $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x f \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n \times \frac{2}{n^3}}{2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

On a bien que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge alors que f ne tend par 0 en $+\infty$ (elle n'est même pas bornée au voisinage de $+\infty$).

Par contre lorsqu'on sait que f admet une limite en $+\infty$, on a la proposition suivante.

Théorème 24

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux. On suppose que f admet une limite ℓ en $+\infty$.

1. Si $\ell \neq 0$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge.
2. Par contraposée, si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge alors $\ell = 0$.

Preuve : Supposons $\ell \neq 0$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $\ell > 0$. Puisque f admet ℓ pour limite en $+\infty$, il existe $\mathrm{A} \in [a, +\infty[$tel que

$$\forall x \geqslant \mathrm{A}, \quad f(x) \geqslant \frac{\ell}{2}$$

Soit $x \geqslant \mathrm{A}$. En intégrant sur entre a et x :

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{\mathrm{A}} f(t)\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{A}}^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^{\mathrm{A}} f(t)\mathrm{d}t + \ell(x - \mathrm{A}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

D'après le théorème de comparaison des limites, $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Finalement, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge. □

1.5 Intégrabilité des fonctions

Définition 25

Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}(I, \mathbb{K})$. On dit que $\displaystyle\int_I f$ est absolument convergente si, et seulement si, $\displaystyle\int_I |f|$ converge.

Théorème 26

Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}(I, \mathbb{K})$. Si $\displaystyle\int_I f$ est absolument convergente alors $\displaystyle\int_I f$ converge.

Définition 27

Soit $f : I \to \mathbb{K}$.
La fonction f est dite intégrable sur I si, et seulement si, f continue par morceaux sur I et $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Remarque : Étudier l'intégrabilité de f sur I revient donc à étudier une intégrale classique sur un segment ou bien à étudier la convergence absolue d'une intégrale impropre. En particulier, si f est intégrable sur I alors $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 28 (Inégalité triangulaire)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction intégrable. Alors,

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$$

Théorème 29

L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.

1.6 Techniques de calcul

1.6.1 Intégration par parties

Théorème 30

Soit f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $(a,b) \in \bar{I}^2$. On suppose que fg a une limite finie en a et en b et on note

$$[fg]_a^b = \lim_{t \to b} fg(t) - \lim_{t \to a} fg(t)$$

Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont de même nature et si elles convergent,

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

Remarque : Dans le cas où a et b appartiennent à I, on retrouve l'énoncé classique vue en première année.

Preuve : Soit $c, x \in]a,b[$. Le théorème d'intégration par parties sur un segment assure que

$$\int_x^c f'g = [fg]_x^c - \int_x^c fg'$$

Comme fg a une limite finie en a et en b, on constate que $\displaystyle\int_a^c f'g$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^c fg'$ converge. Dans ce cas :

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

$\square$

Exercice A17 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}dt$. Montrer que $\Gamma(n)$ est bien définie.
2. Montrer par une intégration par parties que pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$.
3. En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)\ !$

Exercice C18 : [Mines-Télécom-MP 2021]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 (t\ln(t))^n \, \mathrm{d}t$. Montrer que cette intégrale converge. Donner sa valeur.

Exercice C19 : [Mines MP 2016] Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré supérieur ou égal à 2 .

1. Déterminer la nature de l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\mathrm{P}(x))\mathrm{d}x$.
2. Déterminer la nature de l'intégrale $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{+\infty} |\cos(\mathrm{P}(x))|\mathrm{d}x$.
3. Déterminer le signe de I lorsque $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2$.

Exercice C20 : [Centrale Maths 1 MP 2004]
Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2} dx.$$

1.6.2 Changement de variable

Rappelons le théorème de changement de variable sur un segment

Théorème 31 (Changement de variable sur un segment)

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue et $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

Théorème 32 (Changement de variable sur un intervalle quelconque)

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ unebijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$, alors les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et en cas de convergence, elles sont égales :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

Remarque : Dans le cas d'une bijection φ est strictement décroissante, la formule s'écrit :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

Exercice A21 :
Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}dx$ existe puis que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}dx = \pi$$

(On utilisera le changement de variable $x = \tan(t)$).

Exercice E22 :

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$ existe puis que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = 0$ (changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$).
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2e\ln(x)}{e^2+x^2}dx = \pi$ (changement de variable $x = t \times e$).

Exercice E23 :
On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\mathrm{d}t$

1. Justifier que l'intégrale définissant I converge.
2. Montrer que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $2\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\mathrm{d}t$.
4. En déduire la valeur de I.

1.6.3 Parité et imparité

Théorème 33

Soit $c \in [0,+\infty]$. Soit f une fonction continue sur $]-c,c[$. L'intégrale $\int_{-c}^{c} f(t)dt$ est donc impropre en $-c$ et c.

1. On suppose que f est paire (pour tout $x \in]-c,c[, \quad f(-x)=f(x)$). On a l'équivalence suivante :
   $\int_{-c}^{c} f(t)dt$ converge si, et seulement si, $\int_{0}^{c} f(t)dt$ converge.
   Dans ce cas : $\int_{-c}^{c} f(t)dt = 2\int_{0}^{c} f(t)dt.$
2. On suppose que f est impaire (pour tout $x \in]-c,c[, \quad f(-x)=-f(x)$). On a l'équivalence suivante :
   $\int_{-c}^{c} f(t)dt$ converge si, et seulement si, $\int_{0}^{c} f(t)dt$ converge.
   Dans ce cas : $\int_{-c}^{c} f(t)dt = 0.$

Preuve : Supposons que f soit paire (respectivement impaire).
Si $\int_{-c}^{c} f(t)dt$ converge alors par définition $\int_{0}^{c} f(t)dt$ converge.

Réciproquement, supposons que $\int_{0}^{c} f(t)dt$ converge. Effectuons le changement de variable affine $t=-x$. On a donc que $dt=-dx$. Le théorème de changement de variable assure que :
$\int_{0}^{c} f(t)dt$ converge si, et seulement si, $\int_{0}^{-c} f(-x)(-dx)$ converge si, et seulement si, $-\int_{0}^{-c} f(-x)dx$ converge si, et seulement si, $\int_{-c}^{0} f(-x)dx$ converge. Or f est paire (respectivement impaire), on en déduit que :
$\int_{0}^{c} f(t)dt$ converge si, et seulement si, $\int_{-c}^{0} f(x)dx$ converge (respectivement $-\int_{-c}^{0} f(x)dx$ converge) avec en cas de convergence les égalités :

$$\int_{0}^{c} f(t)dt = \begin{cases} \int_{-c}^{0} f(x)dx & \text{si } f \text{ est paire} \\ -\int_{-c}^{0} f(x)dx & \text{si } f \text{ est impaire} \end{cases}$$

On constate que les intégrales $\int_{0}^{c} f(t)dt$ et $\int_{-c}^{0} f(x)dx$ convergent. En conclusion, $\int_{-c}^{c} f(t)dt$ converge et

$$\int_{-c}^{c} f(t)dt = \int_{-c}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{c} f(t)dt = \begin{cases} \int_{0}^{c} f(t)dt + \int_{0}^{c} f(t)dt = 2\int_{0}^{c} f(t)dt & \text{si } f \text{ est paire} \\ -\int_{0}^{c} f(x)dx + \int_{0}^{c} f(t)dt = 0 & \text{si } f \text{ est impaire} \end{cases}$$

□

Exemple : Étudions la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt$.
Remarquons que $f : t \mapsto e^{-|t|}$ est continue sur $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$ etpaire.
L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt$ est impropre en les bornes $-\infty$ et $+\infty$. On a l'égalité :

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad e^{-|t|} = e^{-t}.$$

Or l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente et vaut $\frac{1}{1}=1$. Ainsi $\int_{0}^{+\infty} e^{-|t|}dt$ est convergente et vaut 1.
Comme $f : t \mapsto e^{-|t|}$ est paire, on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-|t|}dt = 2\times 1 = 2.$$

Exemple : Étudions $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}dt$. La fonction $g : t \mapsto te^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ et impaire. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}dt$ est impropre en $-\infty$ et $+\infty$. Étudions en premier lieu $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} te^{-t^2}dt$.
Soit $A \in]0, +\infty[$. Évaluons

$$\int_0^A te^{-t^2}dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^A = -\frac{1}{2}e^{-A^2} + \frac{1}{2} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} te^{-t^2}dt$ est donc convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$. Comme $g : t \mapsto te^{-t^2}$ est impaire, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}dt$ est convergente et vaut 0.

1.7 Intégration des relations de comparaison

Théorème 34 (Cas des fonctions intégrables)

Soit f, g continues par morceaux sur $[a, b[$ et g supposée positive et intégrable sur $[a, b[$.

1. Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)\mathrm{d}t$.
2. Si $f(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}(g(x))$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^b g(t)\mathrm{d}t\right)$.
3. Si $f(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}(g(x))$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}\left(\int_x^b g(t)\mathrm{d}t\right)$.

Preuve : Remarquons tout d'abord que lorsque g est intégrable sur $[a, b[$,

$$\int_x^b g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t - \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b]{} 0$$

Démontrons le troisième point, on sait déjà que f est intégrable.
Il existe $M \in \mathbb{R}$ et $a' > 0$ tels que pour tout $t \in]a', b[$, $|f(t)| \leqslant M \cdot g(t)$.
Pour tout $x > a'$,

$$\left|\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^b |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant M \int_x^b g(t)\mathrm{d}t$$

Par définition :

$$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}\left(\int_x^b g(t)\mathrm{d}t\right)$$

Les deux autres points se démontrent de façon similaire. □

Théorème 35 (Cas des fonctions non intégrables)

Soit f, g continues par morceaux sur $[a, b[$ et g supposée positive et non intégrable sur $[a, b[$.

1. Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$ alors f n'est pas intégrable sur $[a, b[$ et $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$.
2. Si $f(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}(g(x))$ alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)$.
3. Si $f(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}(g(x))$ alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)$.

Preuve : Comme g est positive et n'est pas intégrable sur $[a,b[$,

$$G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\longrightarrow} +\infty$$

Prouvons comme dans le cas précédent uniquement le dernier point.
Supposons donc que $f(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}(g(x))$. Il existe $M\in\mathbb{R}$ et $a'>a$ tels que pour tout $t\in]a',b[$, $|f(t)|\leqslant M\cdot g(t)$.
Pour tout $x>a'$,

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^{a'}|f(t)|\mathrm{d}t+\int_{a'}^x|f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{a'}|f(t)|\mathrm{d}t+M\int_{a'}^x g(t)\mathrm{d}t$$

On a ainsi

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \underbrace{\int_a^{a'}(|f(t)|-Mg(t))\mathrm{d}t}_{\text{constante}}+M\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

Comme $\displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\longrightarrow} +\infty$, le rapport $\dfrac{\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}$ est donc bornée au voisinage de b^-. En conclusion :

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)$$

□

Exercice A24 :
Déterminer des équivalents de

1. $\displaystyle\int_1^x \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers $+\infty$;
2. $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers $+\infty$;
3. $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^t}{t^3}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers 0^+ ;
4. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers 0^+.

Exercice E25 :

1. Montrer que $f : t\mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer un équivalent de $g : x\mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice C26 : [Banque Mines-Ponts PSI]
Soit $f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathrm{I}=]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable sur I et déterminer f'.
3. Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est définie et la calculer.

1.8 Intégrales semi-convergentes

Définition 36

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur$[a,b[$.

On dit que $\displaystyle\int_a^b f$ est semi-convergente si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^b f$ converge et $\displaystyle\int_a^b |f|$ diverge,

Exemple : Montrons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est semi-convergente.

Remarquons que $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Traitons la convergence de l'intégrale en $+\infty$. Soit $x \geqslant 1$. Effectuons une intégration par parties :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$$

Or

$$\left|\frac{\cos(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$$

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}$ converge absolument donc converge.

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est bien convergente.

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} |f|$.

D'après la relation de Chasles, on a

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt$$

Ainsi :

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u + k\pi} du \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{(k+1)\pi} du = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Finalement l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ est divergente.

En conclusion : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est semi-convergente.

Exercice E27 : Pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ converge-t-elle ?

Exercice E28 : La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin\left(e^t\right) dt$ admet-elle une limite en $+\infty$?