Chapitre 4

Réduction des endomorphismes et des matrices

Sommaire

Dans ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désignera un sous-corps de $\mathbb{C}$.

4.1 Élements propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

4.1.1 Sous-espaces stables

Définition 1

Soit E un espace vectoriel. On dit qu'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si, et seulement si, $u(F) \subset F$, autrement dit si :

$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F$$

Dans ce cas, l'application restreinte $u_{|F}$, définie sur F, est à valeurs dans F. Comme u est linéaire, $u_{|F}$ est un endomorphisme de F, appelé endomorphisme induit.

Définition 2

On suppose que F est un sous-espace vectoriel de E stable par $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application linéaire $u_{|F}$ est appelée endomorphisme induit par u sur F.

Proposition 3

Soit u un endomorphisme de E de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit G qun supplémentaire de F dans E.
On note $\mathcal{F}$ une base de F et $\mathcal{G}$ une base de G.
Soit $\mathcal{B}$ la base de E obtenue en concaténant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$,

$$F \text{ est stable par } u \iff \underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \hline & & & * & \cdots & * \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & * & \cdots & * \end{array}\right)$$

Preuve : Notons $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ et $\mathcal{G} = (g_{p+1}, \dots, g_n)$.
$\boxed{\Rightarrow}$: Supposons que F est stable par u. Ainsi pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $u(f_i) \in F = \mathsf{Vect}\,\mathcal{F}$.
$\boxed{\Leftarrow}$: Supposons que la matrice de u est de la forme donnée par l'énoncé.
Par lecture matricielle, pour tout $i \in [\![1, p]\!], u(f_i) \in \mathsf{Vect}\,\mathcal{F} = F$.

Soit $w \in F$, il existe $(\lambda_i)_{i \in [\![1,p]\!]} \in \mathbb{K}^p$, $w = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$. Ainsi par linéarité de u :

$$u(w) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u(f_i) \in F$$

Donc F est stable par u. □

Théorème 4

Soit E un espace vectoriel, $(F_k)_{k \in [\![1,m]\!]}$ des sous-espaces vectoriels de E.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$
On suppose $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$ et on note $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à cette décomposition.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, F_k est stable par u
2. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_m \end{pmatrix}$$

avec pour tout $k \in [\![1, m]\!]$,$A_k \in M_{\dim(F_k)}(\mathbb{K})$.

Dans ce cas, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $A_k = \underset{\mathcal{B}_k}{\mathsf{Mat}}(u_{|F_k})$.

Remarque : Réduire un endomorphisme u de E consiste à écrire

$$E = \bigoplus_{k=1}^{m} F_k$$

où F_k sont des sous-espaces vectoriels stables par u et $u_{|F_k}$ sont des endomorphismes induits "simples".
En dimension finie, la réduction d'un endomorphisme correspond à l'obtention d'une représentation matricielle simple (la plus diagonale possible).

4.1.2 Élements propres

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ de dimension quelconque et u un endomorphisme de E.

Proposition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ de dimension quelconque et u un endomorphisme de E.
Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$ et $D = \text{Vect}(x)$ la droite vectorielle engendrée par x.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. D est stable pour $u \in \mathcal{L}(E)$.
2. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Preuve :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Si D est stable par u alors $u(x) \in D$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}, \quad u(x) = \lambda x$ alors

$$u(D) = u(\operatorname{Vect} x) = \operatorname{Vect} u(x) \subset \operatorname{Vect} x$$

□

Définition 6

On dit que $x \in E$ est vecteur propre de u si, et seulement si,

$$x \neq 0_E \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x$$

Remarque : Par définition un vecteur propre est un vecteur non nul.

Définition 7

Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ un scalaire. On dit que c'est une valeur propre de u si, et seulement si, il existe un vecteur non nul x tel que $u(x) = \lambda x$.
Dans ce cas, x est un vecteur propre que l'on dit associé à la valeur propre λ.

Remarque : Il est important de ne pas oublier que x ne doit pas être nul. En effet :

$$\forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad u(0_E) = 0_E = \lambda.0_E$$

Définition 8 (Spectre)

On appelle spectre de u et on note $\mathsf{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres.

Proposition 9 (Caractérisation des valeurs propres)

Si E est un espace vectoriel de $\boxed{\text{dimension finie}}$ et si $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$;

$$\lambda \in \operatorname{Sp}(u) \iff \det(\lambda \operatorname{Id}_E - u) = 0$$

Preuve : Soit $\lambda \in \mathbf{K}$.

$$\begin{aligned}
\lambda \in \operatorname{Sp}(u) &\iff \exists x \neq 0_E, u(x) = \lambda x \\
&\iff \exists x \neq 0_E, (u - \lambda \operatorname{id}_E)(x) = 0_E \\
&\iff \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E) \neq \{0_E\} \\
&\iff u - \lambda \operatorname{id}_E \text{ n'est pas injectif} \\
&\iff \det(\lambda \operatorname{id}_E - u) = 0
\end{aligned}$$

□

4.1.3 Exemple d'équations aux éléments propres

Exercice A1 :
Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' \end{array} \right.$$

Exercice E2 :
On définit φ sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\varphi : P \mapsto (X-1)(X-2)P' - 2XP.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit P un vecteur propre de φ. Déterminer le degré de P.
3. Écrire dans la base $\left(1, (X-1), (X-1)^2\right)$ la matrice M de la restriction de φ à $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice C3 : [Mines-Ponts]
Soit $p \in]-1,1[\backslash\{0\}$. Posons $q = 1-p$ et $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose pour $f \in \mathrm{E}$ et $x \in \mathbb{R}$, $u(f)(x) = f(px+q)$.

1. Montrer que u est un automorphisme de E.
2. Montrer que $\operatorname{Sp}(u) \subset]-1,1]\backslash\{0\}$.
3. Montrer que si f est un vecteur propre de u, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(k)} = 0$.

Exercice E4 : Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ défini par $\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{XP}'$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Déterminer les éléments propres de φ.

4.1.4 Sous-espaces propres

Définition 10

Soit $\lambda \in \mathsf{Sp}(u)$. On appelle sous-espace propre associé à λ et on note $E_\lambda(u)$ le sous-espace vectoriel

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, \mathrm{id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$$

Remarque : Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est constitué des vecteurs propres associés à λ et du vecteur nul. Il est incorrect de dire que le sous-espace propre est l'ensemble des vecteurs propres

Proposition 11

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme u sont stables par u et l'application induite est une homothétie $x \mapsto \lambda \cdot x$

Preuve : Soit $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ. Pour tout $x \in E_\lambda(u)$, on a $u(x) = \lambda \cdot x \in E_\lambda(u)$.
L'espace $E_\lambda(u)$ est stable et l'endomorphisme induit est l'homothétie $x \mapsto \lambda \cdot x$ □

Théorème 12

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres deux à deux distinctes. Les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_n(u)}$ sont en somme directe :

$$E_{\lambda_1}(u) + \ldots + E_{\lambda_n(u)} = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(u)$$

Preuve : Raisonnons par récurrence sur n.
- Pour $n = 1$ la propriété est vraie.
- Soit $n \geqslant 1$. On suppose que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_n(u)}$ sont en somme directe.
Considérons $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u.
On veut montrer que si $x_1 + \cdots + x_{n+1} = 0_E$ avec pour tout $i \in [\![1, n]\!], x_i \in E_{\lambda_i}(u)$ alors pour tout $i \in [\![1, n+1]\!], \quad x_i = 0_E$.
Supposons que :

$$x_1 + \cdots + x_{n+1} = 0_E \quad L_1$$

avec pour tout $i \in [\![1, n+1]\!], x_i \in E_{\lambda_i}(u)$. En appliquant u à l'égalité L_1, on obtient par linéarité :

$$0_E = u(0_E) = u\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0_E \quad L_2.$$

En effectuant l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - \lambda_{n+1} L_1$ on supprime le terme en x_{n+1} et on obtient alors :

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_{n+1})\, x_i = 0_E$$

Or $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_n(u)}$ sont en somme directe, on en déduit quet

$$\forall i \in [\![1, n]\!], (\lambda_i - \lambda_{n+1})\, x_i = 0_E.$$

Or $\lambda_i \neq \lambda_{n+1}$. Donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0_E$$

En reprenant l'égalité L_1, on en déduit que $x_{n+1} = 0_E$.
Finalement, on a montré que $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_{n+1}}(u)$ sont en somme directe.
L'hérédité est prouvée. La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Proposition 13

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs propres associées à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Preuve : Supposons que I est un ensemble fini,
Soit $x_1,\dots,x_m$ des vecteurs propres associés à des valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ deux à deux distinctes. Soit $(\alpha_i)_{i\in[\![1,m]\!]}\in\mathbb{K}^m$ tels que :

$$\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_mx_m=0_E$$

Or $\alpha_kx_k\in E_{\lambda_k}(u)$ et comme les sous-espaces vectoriels $E_{\lambda_1}(u),\dots,E_{\lambda_m}(u)$ sont en somme directe, on a

$$\forall k\in\{1,\dots,m\},\alpha_kx_k=0_E$$

Or $x_k\neq 0_E$ (car c'est un vecteur propre) donc $\alpha_k=0$. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est donc libre.

Dans le cas où I est infini, il suffit d'utiliser qu'une famille (infinie) est libre si toutes ses sous-familles finies sont libres. $\square$

Exemple : On considère la famille

$$f_k : t\mapsto \sin(kt)$$

pour $k\in\mathbf{N}$ On remarque que $f_k''=-k^2f_k$.
On en déduit que f_k est un vecteur propre pour $\lambda=-k^2$ de l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty$ défini par $f\mapsto f''$.
La famille $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc libre.

Corollaire 14

Soit E un espace vectoriel de $\boxed{\text{dimension finie } n}$ et $u\in\mathcal{L}(E)$,

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}\dim\left(E_\lambda(u)\right)\leqslant\dim E$$

En particulier, l'endomorphisme u a au plus n valeurs propres.

$$\mathsf{card}(\mathrm{Sp}(u))\leqslant\dim E$$

Preuve :
On a l'inclusion :

$$\bigoplus_{\lambda\in\mathsf{Sp}(u)}E_\lambda(u)\subset E.$$

On en déduit que :

$$\dim\left(\bigoplus_{\lambda\in\mathsf{Sp}(u)}E_\lambda(u)\right)\leqslant\dim(E).$$

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}\dim\left(E_\lambda(u)\right)\leqslant\dim E$$

Or pour tout $\lambda\in\mathsf{Sp}(u)$, $\dim\left(E_\lambda(u)\right)\geqslant 1$, ainsi :

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}1\leqslant\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}\dim\left(E_\lambda(u)\right)\leqslant\dim E$$

Finalement :

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(u))\leqslant n$$

$\square$

Proposition 15

Soit $u,v\in\mathcal{L}(E)$ tels que $u\circ v=v\circ u$. Alors tout sous-espace propre de u est stable par v.

Preuve : Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Pour tout $x \in E_\lambda(u), u(x) = \lambda x$. Donc

$$u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda v(x)$$

Ainsi $v(x) \in E_\lambda(u)$. □

Remarques :

1. Lorsque deux endomorphismes u et v commutent, on pourra introduire l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$.
2. Dans la preuve précédente, $v(x)$ n'est pas nécessairement un vecteur propre de u, car il se peut que $v(x) = 0_E$.

Exercice A5 :
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

4.1.5 Élements propres d'une matrice carrée

Définition 16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si, et seulement si, il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AX = \lambda X$.
2. On dit que la matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ si, et seulement si, elle est non nulle et vérifie $AX = \lambda X$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est :

$$E_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}$$

4. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le spectre de A et noté $\mathsf{Sp}(A)$.

Remarque : Si on introduit a l'endomorphisme canoniquement associée à A :

$$a : \begin{cases} M_{n,1}(\mathbb{K}) \to M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \mapsto AX \end{cases}$$

Les valeurs propres, espaces propres et spectre de A sont ceux de a.

Proposition 17

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u)$.

1. Les valeurs propres de u sont les valeurs propres de A : $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A)$.
2. Si λ une valeur propre de u. Soit $x \in E, x$ est un vecteur propre de u associé à λ si et seulement si le vecteur colonne $X = \underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(x)$ des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ est un vecteur propre de A.

Preuve : Soit $x \in E$ et $X = \mathsf{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. On considère $Y = \mathsf{Mat}_{\mathcal{B}}(u(x)) = AX$ le vecteur colonne des coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned} x \text{ est un vecteur propre pour } u \text{ associé à } \lambda &\iff u(x) = \lambda x \\ &\iff Y = \lambda X \\ &\iff AX = \lambda X \\ &\iff X \text{ est un vecteur propre pour } A \text{ associé à } \lambda \end{aligned}$$

□

Proposition 18

Soit A et B de matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On a $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$.

Preuve : Soit $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$,

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(B) \iff \operatorname{rg}(B - \lambda I_n) < n \iff \operatorname{rg}\left(P^{-1}(A - \lambda I_n)P\right) < n \iff \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n \iff \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$$

□

Remarque : Les matrices A et B n'ont pas nécessairement les mêmes sous-espaces propres.

Exemple : Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En tant que matrice de $M_2(\mathbb{R})$, $\mathsf{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$. En effet, soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathsf{Sp}(A) &\iff \det(\lambda I_2 - A) = 0 \iff \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff \lambda^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Cette dernière équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Par contre en tant que matrice de $M_2(\mathbb{C})$, $\mathsf{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{i, -i\}$.

Proposition 19

Soit $\mathbb{K}'$ un sous-corps du corps $\mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$. Alors le spectre de A dans $\mathbb{K}'$ est inclus dans le spectre de A dans $\mathbb{K}$:

$$\underset{\mathbb{K}'}{\mathsf{Sp}}(A) \subset \underset{\mathbb{K}}{\mathsf{Sp}}(A).$$

Preuve : Soit $\lambda \in \mathbb{K}'$ une valeur propre de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}')$ un vecteur propre associé.
Comme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}') \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \lambda$ est aussi valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, finalement :

$$\underset{\mathbb{K}'}{\mathsf{Sp}}(A) \subset \underset{\mathbb{K}}{\mathsf{Sp}}(A).$$

□

Exercice A6 : [Matrices stochastiques]
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}_{ij} \geqslant 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $\sum_{j=1}^n \mathrm{A}_{i,j} = 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

1. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.
2. Montrer que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}), |\lambda| \leqslant 1$.

Exercice E7 : [Théorème de Gerschgorin]
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont notés $a_{i,j}$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $\mathrm{R}_i = \displaystyle\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ et on note D_i le disque de centre $a_{i,i}$ et de rayon R_i. Montrer que toute valeur propre de A appartient à l'un au moins des disques D_i.

4.2 Polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$,

$$\begin{aligned} \lambda \in \operatorname{Sp}(A) &\iff \mathsf{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{M_{n,1}(\mathbb{K})}\} \\ &\iff A - \lambda I_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathrm{K}) \\ &\iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \\ &\iff \det(\lambda I_n - A) = 0 \end{aligned}$$

Définition 20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ une matrice carrée on appelle polynôme caractéristique de A et on note χ_A le polynôme

$$\chi_A = \det(XI_n - A)$$

Preuve : Pour définir correctement la notion précédente, on remarque que $A - XI_n \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K}(X))$. La définition du déterminant donne :

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X - a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & X - a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & X - a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(X\delta_{\sigma(i),i} - a_{\sigma(i),i}\right) \in \mathbb{K}[X]$$

□

Théorème 21 (Propriétés du polynôme caractéristique)

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. Le polynôme χ_M est unitaire et de degré n. Plus précisément :

$$\chi_M = X^n - \mathsf{Tr}(M)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M).$$

Preuve : Reprenons l'expression de χ_M :

$$\begin{aligned} \chi_M(X) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(x\delta_{\sigma(i),i} - m_{\sigma(i),i}\right) = \varepsilon(\mathsf{Id}) \prod_{i=1}^{n} \left(x\delta_{\mathsf{Id}(i),i} - m_{\mathsf{Id}(i),i}\right) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq \mathsf{Id}}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(x\delta_{\sigma(i),i} - m_{\sigma(i),i}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (X - m_{i,i}) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq \mathsf{Id}}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(X\delta_{\sigma(i),i} - m_{\sigma(i),i}\right). \end{aligned}$$

Examinons la somme. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $\sigma \neq \mathsf{Id}$. Il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$ tels que $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(j) \neq j$. Donc $\delta_{\sigma(i),i} = 0$ et $\delta_{\sigma(j),j} = 0$. Ainsi le polynôme $\prod_{i=1}^{n} \left(X\delta_{\sigma(i),i} - m_{\sigma(i),i}\right)$ est de degré inférieur ou égal à $n-2$.

Les termes de degré n et $n-1$ dans χ_M sont donc dans le polynôme $\prod_{i=1}^{n} (X - m_{i,i})$ dont le développement est :

$$\prod_{i=1}^{n} (X - m_{i,i}) = X^n - (m_{1,1} + \cdots + m_{n,n})X^{n-1} + \ldots$$

Le polynôme χ_M est donc de degré n et unitaire. Enfin, pour obtenir le terme constant, on évalue en 0 :

$$\chi_M(0) = \det(-M) = (-1)^n \det(M).$$

□

Remarque : Dans les anciens sujets de concours, il arrive que l'on trouve aussi la définition $\chi_A = \det(A - XI_n)$. Cela ne change pas les propriétés (à part que le polynôme n'est plus toujours unitaire.) On va surtout s'intéresser aux racines.

Théorème 22

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Longleftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$$

Exemples :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A = (-1)^3 \begin{vmatrix} -X & 2 & -1 \\ 3 & -2-X & 0 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix} = X^3 + X^2 - 10X + 8 = (X-1)(X+4)(X-2)$$

   On a donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-4, 1, 2\}$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = (X-a)(X-d) - bc = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$$

   On a donc

$$\chi_A(x) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$$

3. Dans le cas d'une matrice diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   alors $\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$. Par conséquent :

$$\mathrm{Sp}\, A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

4. Dans le cas d'une matrice triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   On a $\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$.

$$\mathrm{Sp}\, A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

Proposition 23

Soit A et B deux matrices semblables,

$$\chi_A = \chi_B$$

Preuve : Comme A et B sont semblables, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Ainsi :

$$\chi_B = \det(XI_n - B) = \det\left(XP^{-1}P - P^{-1}AP\right) = \det\left(P^{-1}(XI_n - A)P\right) = \det\left(P^{-1}\right)\chi_A \det(P) = \chi_A$$

□

4.2.1 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel de dimension finie.

Définition 24 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On appelle polynôme caractéristique de u et on note χ_u le polynôme caractéristique d'une de ses matrices.

$$\chi_u = \chi_{\mathsf{Mat}_{\mathcal{B}}(u)}$$

Remarque : Cette définition est cohérente du fait que si A et B sont semblables alors $\chi_A = \chi_B$.

Exemple : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p et G un supplémentaire. Soit p la projection sur F par rapport à G. On cherche χ_p. On se place dans une base adaptée $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant une base de F avec une base de G. On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & (0) \\ 0 & & 1 & \\ \hline & (0) & & (0) \end{array}\right)$$

On a donc $\chi_p = (X-1)^d X^{n-d}$ où $d = \mathsf{rg}(p) = \mathsf{Tr}(p)$.

Théorème 25

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les racines de χ_u sont les valeurs propres de u.

4.2.2 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Définition 26 (Ordre de multiplicité d'une valeur propre)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.
L'ordre de multiplicité de λ (par rapport à u) est l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme χ_u.

Remarques :

1. On parle aussi de multiplicité de λ. On dit aussi "λ est valeur propre d'ordre...".
2. Par convention, un scalaire de multiplicité 0 n'est pas une valeur propre.
3. Les valeurs propres sont les scalaires de multiplicité strictement positive.
4. De même si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. L'ordre de multiplicité de λ (par rapport à A) est l'ordre de multiplicité de λ dans χ_A.

Exemple : Si on reprend notre projecteur de l'exemple ci-dessus. On voit que 1 est valeur propre d'ordre d et 0 est valeur propre d'ordre $n-d$.

Proposition 27

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$). Le nombre de valeur propres comptées avec multiplicités est inférieur ou égal à $n = \dim E$.
Si $\mathrm{K} = \mathbb{C}$ le nombre de valeur propres comptées avec multiplicités est égal à $n = \dim E$.

Preuve : Le nombre les racines de χ_u (resp. χ_A) est inférieur ou égal au degré de χ_u (resp. χ_A) qui vaut n.
Si K = C, on sait que le nombre de racines d'un polynôme compté avec leur ordre de multiplicité vaut $\deg(\chi_u) = n$. □

Proposition 28

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in L(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Le polynôme caractéristique de $u_{|F}$ divise le polynôme caractéristique de u. En d'autres termes :

$$\chi_{u_{|F}} | \chi_u.$$

Preuve : Soit $\mathcal{B}_F$ une base de F. Complétons cette dernière en une base $\mathcal{B}$ de E. Notons $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$. Comme F est stable par u, on sait que :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathcal{F}}} u_{|F} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

avec $B \in M_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$. Par définition :

$$\chi_u = \begin{vmatrix} XI_p - \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathcal{F}}} u_{|F} & -B \\ 0 & XI_{n-p} - C \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant triangulaire supérieur, on obtient l'égalité :

$$\chi_u = \det\left(XI_p - \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathcal{F}}} u_{|F}\right) \det\left(XI_{n-p} - C\right) = \chi_{u_{|F}} \det\left(XI_{n-p} - C\right).$$

Par conséquent :

$$\chi_{u_{|F}} | \chi_u.$$

□

Théorème 29

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in L(E)$. Soit λ une valeur propre de u d'ordre de multiplicité noté $m(\lambda)$. On a les inégalités :

$$1 \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)) = \dim(E_\lambda(u)) \leqslant m(\lambda).$$

Preuve : Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$. Notons $p = \dim(E_\lambda(u))$.
Par définition, $E_\lambda(u) \neq \{0_E\}$. Donc $\dim(E_\lambda(u)) \geqslant 1$.
D'autre part, le sous-espace vectoriel $E_\lambda(u)$ est stable par u. L'endomorphisme induit par f sur $E_\lambda(u)$ a pour matrice dans n'importe quelle base de $E_\lambda(u)$ la matrice λI_p.
Le polynôme caractéristique de $u_{|E_\lambda(u)}$ est donc $(X - \lambda)^p$.
D'après la proposition précédente, $(X - \lambda)^p$ divise χ_u. Nécessairement $p \leqslant m(\lambda)$.
En conclusion,

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(u)) \leqslant m(\lambda).$$

□

Corollaire 30

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in L(E)$.
Soit λ une valeur propre de f d'ordre de multiplicité noté $m(\lambda)$.
Si $m(\lambda) = 1$ alors $\dim(E_\lambda(u)) = 1$.

Preuve : D'après le théorème précédent,
$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda) = 1.$$
Par antisymétrie, $\dim(E_\lambda(u)) = 1$. □

Exercice A8 : Soit $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M.
2. En déduire les valeurs propres de M.
3. Déterminer les sous-espaces propres de M

Exercice E9 :
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Exprimer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de A.

Exercice C10 : [Mines-Ponts]
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On se propose de démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

1. Démontrer le résultat lorsque la matrice A est inversible.
2. On se place maintenant dans le cas général. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Etablir que
$$\begin{pmatrix} \lambda I_n - BA & B \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ 0 & \lambda I_n - AB \end{pmatrix}.$$
En déduire que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

Exercice E11 : [Matrices compagnons]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. On considère le polynôme $P_n = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$ et la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

1. Montrer que les sous-espaces propres de A sont des droites.
2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:
$$\det(\lambda I_n - A) = P(\lambda)$$
3. En déduire : A est diagonalisable si, et seulement si, P_n admet n racines distinctes dans $\mathbb{K}$.

Exercice C12 : [Mines-Télécom]
Soit l'endomorphisme
$$u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto \mathrm{M} + \mathrm{tr}(\mathrm{M}) \mathrm{I}_n \end{cases}$$
Déterminer les valeurs propres de u, ainsi que les espaces propres associés.

Exercice E13 :
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{A}^\top}$.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}\left(\mathrm{A}^\top\right)$.
3. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}), \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = \dim \mathrm{E}_\lambda\left(\mathrm{A}^\top\right)$.

Exercice E14 : Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique (c'est-à-dire vérifiant $M^\top = -M$). Le but de l'exercice est de montrer que M n'admet que des valeurs propres nulles ou imaginaires pures. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M associée à un vecteur propre $V \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}$.

1. Montrer que $\bar{V}^\top M^\top = \bar{\lambda} \bar{V}^\top$. En déduire que $\bar{V}^\top M = -\bar{\lambda} \bar{V}^\top$.
2. Montrer que $\overline{V}^\top M M V = -\lambda \bar{\lambda} \overline{V}^\top V$.
3. En déduire que $\lambda^2 + \lambda \bar{\lambda} = 0$ et donc que λ est soit nulle soit imaginaire pur.

4.3 Diagonalisation

4.3.1 Diagonalisation d'un endomorphisme

Définition 31 (Diagonalisabilité d'un endomorphisme)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit u un endomorphisme de E
L'endomorphisme u est dit diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Remarques : Dans le cas où u est diagonalisable.

1. Dans une telle base, la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où les nombres $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont les valeurs propres de u.
2. Diagonaliser un endomorphisme lorsque cela est possible, c'est déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de u.
3. Les $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ apparaissent dans la matrice précédente autant de fois que leur ordre de multiplicité.
4. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E telle que la matrice de u soit diagonale. Quitte à réordonner les vecteurs de $\mathcal{E}$ on peut supposer que les coefficients diagonaux égaux de la matrice soient consécutifs.
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_p & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$
Dans cette représentation,les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont deux à deux distinctes.
5. La matrice de u dans une base quelconque est alors semblable à une matrice diagonale.

Exemples : L'identité Id_E, tous les projecteurs et toutes symétries vectorielles sont diagonalisables.

Définition 32 (Diagonalisabilité d'une matrice)

Une matrice carrée est dite diagonalisable si, et seulement si, elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarques :
1. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique donc mêmes valeurs propres.
2. Une matrice (ou un endomorphisme) n'est pas toujours diagonalisable.

Exemple : Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme M est une matrice triangulaire supérieure $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$.
Si M était diagonalisable, M serait semblable à la matrice nulle.
Il existerait une matrice $P \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que :
$$M = P \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Ce qui est impossible. En conclusion, la matrice M n'est pas diagonalisable.
Un calcul permet de montrer que $E_0(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \neq M_{2,1}(\mathbb{K})$.

Théorème 33 (Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité (1))

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) de ses sous-espaces propres vaut E :

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E.$$

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Rappelons que $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) \subset E$. Supposons que u est diagonalisable.
Soit $\mathcal{E}$ une base de E telle que la matrice de u soit diagonale.

$$\underset{\mathcal{E}}{\mathsf{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_p & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p I_{\alpha_p} \end{pmatrix}$$

Prouvons que $E \subset \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
Soit $w \in E$, si on le décompose dans la base $\mathcal{E} = (\underbrace{e_{1,1}, \ldots, e_{1,\alpha_1}}_{\in E_{\lambda_1}(u)}, \ldots, \underbrace{e_{p,1}, e_{p,\alpha_p}}_{\in E_{\lambda_p}(u)})$. Il existe une famille de scalaires $(\mu_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,\alpha_i]\!]}$ telle que

$$w = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\sum_{j=1}^{\alpha_i} \mu_{i,j} e_{i,j}}_{=w_i} = \sum_{i=1}^{p} w_i$$

Or pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $w_i \in E_{\lambda_i}(u)$. On a donc $w \in \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ Ainsi

$$E \subset \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

Par double inclusion :

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que la somme des espaces propres vaut E.

$$\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = E.$$

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on choisit alors une base $\mathcal{E}_i$ de chaque $E_{\lambda_i}(u)$. En concaténant ces bases on obtient une base de E

$$\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_p)$$

dans laquelle la matrice de u est diagonale.

□

Théorème 34 (Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité (2))

L'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si,

$$\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\left(E_\lambda(u)\right)$$

Preuve :
Rappelons que les espaces propres sont en somme directe et que l'on a l'inclusion :

$$\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) \subset E$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable } &\iff \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = E \\ &\iff \dim \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = \dim E \\ &\iff \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) = \dim E \end{aligned}$$

□

Théorème 35 (Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité (3))

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si

1. χ_u est scindé
2. $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad \dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$.

Preuve : Raisonnons par double implication.
$\boxed{\Longrightarrow}$
Notons α_i la dimension de $E_{\lambda_i}(u)$. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p I_{\alpha_p} \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u. Ainsi,

$$\chi_u = \chi_M = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \times \cdots \times (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

Le polynôme caractéristique de u est donc scindé et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, l'ordre de multiplicité de λ_i vaut $\dim \left(E_{\lambda_i}(u)\right)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que χ_u est scindé et que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$
On a alors :

$$\dim(E) = \deg(\chi_u) \underset{\text{scindé}}{=} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m(\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\left(E_\lambda(u)\right)$$

□

Théorème 36 (Condition SUFFISANTE de diagonalisabilité)

1. Si χ_u est scindé et n'admet que des racines simples alors u est diagonalisable.
2. Si E est de dimension n et que u admet n valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable.

Preuve : En effet, si λ est valeur propre simple de u alors $\dim E_\lambda(u) = 1 = m(\lambda)$. □

Remarque : Ce n'est qu'une condition $\boxed{\text{suffisante.}}$

Meth 37 (Plan de diagonalisation)

Étude de la diagonalisabilité d'un endomorphisme u.

1. On détermine χ_u.
2. Si χ_u n'est pas scindé, u n'est pas diagonalisable. Dans $\mathbb{C}$, χ_u est toujours scindé.
3. Si χ_u est scindé, on compare $\dim E_\lambda$ et $m(\lambda)$.
À ce stade, il n'est pas toujours nécessaire de déterminer une base de E_λ. On pourra remarquer que $\dim E_\lambda = n - \mathrm{rg}\,(M - \lambda I_n)$. (théorème du rang)
4. Si u est diagonalisable. On détermine une base de E_λ pour chaque valeur propre en résolvant l'équation $MX = \lambda X$ et on concatène les bases obtenues.

4.3.2 Diagonalisation d'une matrice

Proposition 38

Une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si, et seulement si, l'endomorphisme de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ qui lui est canoniquement associé est diagonalisable.

Proposition 39

Une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A.
Si on note $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ cette base de vecteurs propres de A, alors

$$\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1} \iff D = P^{-1}AP.$$

avec P la matrice dont les vecteurs colonnes sont $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est la valeur propre associée à X_i.

Théorème 40

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est diagonalisable.
2. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp(A)}} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$
3. $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp(A)}} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = n$
4. χ_{A} est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp(A)}, \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = m_\lambda(\mathrm{A})$.

Théorème 41 (Condition SUFFISANTE de diagonalisabilité)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si A possède n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable.
2. Si χ_{A} est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples alors A est diagonalisable.

Remarque : Il s'agit d'une condition suffisante mais pas nécessaire.
Par exemple, si $n \geqslant 2$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \mathrm{I}_n$ est diagonalisable mais possède λ comme unique valeur propre et son polynôme caractéristique $(X-\lambda)^n$ admet λ comme racine de multiplicité n.

Meth 42

Diagonaliser une matrice diagonalisable A consiste à trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

1. On détermine χ_A.
2. Si χ_A n'est pas scindé, A n'est pas diagonalisable. Dans le cas où $A \in M_n(\mathbb{C}), \chi_A$ est toujours scindé.
3. Si χ_A est scindé, on compare $\dim E_\lambda$ et $m(\lambda)$. À ce stade, il n'est pas toujours nécessaire de déterminer une base de E_λ. On pourra remarquer que
   $\dim E_\lambda = n - \operatorname{rg}(M - \lambda I_n)$. (théorème du rang)
4. Si A est diagonalisable :
   (a) Déterminer les valeurs propres de A et des bases des sous-espaces propres associés.
   (b) Former la matrice P dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs des bases des différents sous-espaces propres.
   (c) Former la matrice diagonale D constituée des valeurs propres de A, chaque colonne de D contenant la valeur propre associée à la colonne correspondante de P.

4.3.3 Exemples

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Déterminons le spectre de A :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & -3 & -4 \\ -3 & x-1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 0 \\ -3 & x-1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x-3 & 0 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix}$$
$$= (x-2)(x-1)(x-3)(x+1)$$

La matrice A admet quatre valeurs propres simples et $A \in M_4(\mathbb{R})$, donc A est diagonalisable.

Déterminons les sous-espaces propres de A. Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{K})$.

$$\boldsymbol{E_{-1}} : (A+I_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + \quad +3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ \hfill 4x_3 \quad = 0 \\ \hfill 4x_3 \quad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -4/3 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E_1} : (A-I_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + +3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + +2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E_2} : (A-2I_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_3 : (A-3I_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En conclusion :

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 1 & 7 \\ 9 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres réelles de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?
2. Déterminer les valeurs propres complexes de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?

1. On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 \left(\lambda^2 + 4\right)$$

Le polynôme caractéristique n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc A n'est pas diagonalisable $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

2. A a trois valeurs propres complexes : deux valeurs propres simples (2i et -2i) et une valeur propre double 0.
La dimension d'un espace propre associé à une valeur propre simple est égale à 1.
Le rang de A est 2 car $C_4 = -C_1, C_3 = C_2$ et C_2 n'est pas colinéaire à C_1.
Donc, d'après le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker}(A) = 4 - \operatorname{rg}(A) = 2$$

Finalement, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ car χ_A est scindé et

$$\dim(E_{2i}) + \dim(E_{-2i}) + \dim(\dim(E_0)) = \dim(M_{4,1}(\mathbb{C})) = 4$$

Exercice A15 : Considérons
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Diagonaliser A.
Exercice A16 : Soit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
Diagonaliser A.

Exercice C17 : [CCINP]
On considère $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M} + 2\mathrm{M}^\top \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Calculer $\operatorname{tr}(f)$ et $\det(f)$.

Exercice C18 : [CCINP]
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 2$, telle que $\operatorname{rg}(\mathrm{A}) = 1$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr}(\mathrm{A}) \neq 0$.

Exercice E19 :
Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose u diagonalisable. Montrer que u et v commutent si et seulement si tout sous-espace propre de u est stable par v.

Exercice C20 : [Mines-Télécom]
On pose :
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Les matrices A et B sont-elles semblables ?

Exercice E21 :
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que s'il existe un entier p tel que $M^p = I_n$ alors $M^2 = I_n$.
2. Montrer que s'il existe un entier p tel que $M^p = 0$ alors $M = 0$.

4.4 Trigonalisation

4.4.1 Trigonalisation des endomorphismes

Définition 43 (Endomorphismes trigonalisables)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il est dit trigonalisable si, et seulement si, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u)$ soit triangulaire supérieure :

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Remarques :

1. Les coefficients diagonaux de la matrice précédente sont les valeurs propres de u. Chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans χ_u.
2. Un endomorphisme diagonalisable est donc trigonalisable.

Proposition 44 (Trigonalisabilité, déterminant et trace)

Soit u un endomorphisme trigonalisable d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors

$$\mathrm{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda(u)\lambda \quad \text{et} \quad \det(u) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^{m_\lambda(u)}$$

En d'autres termes, la trace et le déterminant sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité.

Preuve : Soit u un endomorphisme trigonalisable. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de u est alors

$$\prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$$

Les $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont alors les valeurs propres comptées avec multiplicité. On en déduit que

$$\mathrm{Tr}(u) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

$$\det(u) = \lambda_1 \dots \lambda_n$$

□

Remarque : Le résultat précédent est vrai pour les endomorphismes diagonalisables.

Théorème 45 (Trigonalisabilité et polynôme caractéristique)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 46

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.

4.4.2 Trigonalisation des matrices

Définition 47 (Matrices trigonalisables)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice A est trigonalisable si, et seulement si, elle est semblable a une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T \in TS_n(\mathbb{K})$ telles que

$$P^{-1}AP = T \iff A = PTP^{-1}$$

Remarque :

1. Les coefficients diagonaux de cette matrice triangulaire supérieure T sont les valeurs propres de A. Chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans χ_{A}.
2. Une matrice diagonalisable est donc trigonalisable.

Proposition 48 (Lien entre matrice et endomorphisme)

1. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si, et seulement si, l'endomorphisme de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ qui lui est canoniquement associé est trigonalisable.
2. Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est trigonalisable si, et seulement si, sa matrice dans une base de E est trigonalisable.

Proposition 49 (Trigonalisabilité, déterminant et trace)

Soit A une matrice carrée trigonalisable. Alors

$$\mathrm{Tr(A)} = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp(A)}} m_\lambda(\mathrm{A})\lambda \quad \text{et} \quad \det(\mathrm{A}) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp(A)}} \lambda^{m_\lambda(\mathrm{A})}$$

En d'autres termes, la trace et le déterminant sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité.

Remarque : Ce résultat est vrai pour les matrices diagonalisables.

Théorème 50 (Trigonalisabilité et polynôme caractéristique)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable si, et seulement si, χ_{A} est scindé sur $\mathbb{K}$.

Remarque : La trigonalisabilité peut donc dépendre du corps de base $\mathbb{K}$.

Preuve : $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que A est trigonalisable. La matrice A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\chi_A = \chi_T = \det(XI_n - A) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

χ_A est bien un polynôme scindé.

$\boxed{\Rightarrow}$ Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{H}_n : \quad \text{Toute matrice de } M_n(\mathbb{K}) \text{ ayant un polynôme caractéristique scindé est trigonalisable.}$$

Initialisation : On vérifie que $\mathcal{H}_1$ est vraie. En effet toute matrice de $M_1(\mathbb{K})$ est triangulaire.
Hérédité : Supposons que la propriété $\mathcal{H}_n$ soit vraie pour un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ fixe mais quelconque. Montrons alors que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
Soit $A \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que χ_A est scindé. On pose

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n+1} (X - \lambda_i)$$

Le scalaire λ_{n+1} est une racine de χ_A, donc une valeur propre de A. La matrice A est semblable à une matrice de la forme :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_{n+1} & C \\ \hline 0 & \\ \vdots & B' \\ 0 & \end{array}\right)$$

avec $B' \in M_n(\mathbb{K})$. Remarquons que :

$$\chi_A = \chi_B = (X - \lambda_{n+1})\,\chi_{B'}$$

On en déduit que :

$$\chi_{B'} = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

$\chi_{B'}$ est donc scindé et $B' \in M_n(\mathbb{K})$.
D'après $\mathcal{H}_n$ la matrice B' est semblable à une matrice triangulaire. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}B'P = T$ soit triangulaire supérieure.

Considérons la matrice Q :

$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{array}\right) \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$$

On remarque que $Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$.
Un calcul matriciel par blocs donne :

$$\widehat{T} = Q^{-1}BQ = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_{n+1} & \cdots \\ \hline 0 & \\ \vdots & P^{-1}B'P \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_{n+1} & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Cette dernière matrice est triangulaire supérieure donc B est trigonalisable.
Comme A et B sont semblables, par transitivité, A est semblable à $\widehat{T}$. Finalement, A est trigonalisable.
Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
La récurrence est ainsi faite. On en déduit que :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$ ayant un polynôme caractéristique scindé est trigonalisable.

□

Corollaire 51

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

4.4.3 Trigonalisation d'une matrice de $M_2(\mathbb{K})$

On suppose χ_u scindé avec $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\dim E = 2$. Le polynôme caractéristique de u est de la forme

$$\chi_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$$

1. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, comme χ_u est scindé à racines simples, u est diagonalisable.
   Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

2. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.
   (a) Si $\dim(E_\lambda) = 2$. L'endomorphisme u est diagonalisable et

   $$\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u) = PDP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} = \lambda I_2$$

   Et u vaut alors $\lambda \, \mathrm{Id}_E$.

   (b) Si $\dim E_\lambda = 1$. Soit $e_1 \in E_\lambda, e_1 \neq 0_E$ et on complète la famille libre (e_1) en une base (e_1, e_2) de E. Dans cette base,

   $$\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & \times \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

   On peut toujours choisir e_2 de sorte que $\mathsf{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exemple :

4.4.4 Trigonalisation d'une matrice de $M_3(\mathbb{K})$

Soit $u \in L(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension 3. On suppose χ_u scindé. Le polynôme caractéristique de u est de la forme

$$\chi_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$$

1. Si les $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont deux à deux distincts, χ_u étant scindé à racines simples, u est diagonalisable.
   Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

   $$\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

2. Si λ_1 est racine simple et si $\lambda_2 = \lambda_3$, deux cas sont possibles :
   (a) Si $\dim E_{\lambda_2} = 2$ et u est diagonalisable.
   (b) $\dim E_{\lambda_2} = 1$ et alors, u n'est pas diagonalisable.
   On choisit alors $e_1 \in E_{\lambda_1}$ et $e_2 \in E_{\lambda_2}$ non nuls que l'on complète en une base (e_1, e_2, e_3) de E. Dans cette base,

   $$\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \times \\ 0 & \lambda_2 & \times \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

   On peut choisir e_3 de sorte que dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

   $$\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

3. Si λ est racine triple.
   (a) Si $\dim E_\lambda = 3$ alors u est diagonalisable et $u = \lambda \, \mathrm{Id}_E$.
   (b) Si $\dim E_\lambda = 2$ et alors on complète une base (e_1, e_2) de E_λ en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E. Dans cette base,

   $$\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \times \\ 0 & \lambda & \times \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(c) Si λ est racine triple et $\dim E_\lambda = 1,$ on admet pour l'instant que :

$$E = \mathsf{Ker}(u - \lambda \mathsf{Id}_E)^3$$

Il s'agit du lemme des noyaux.
On a l'inclusion des noyaux :

$$\mathsf{Ker}(u - \lambda \mathsf{Id}_E) \subset \mathsf{Ker}(u - \lambda \mathsf{Id}_E)^2 \subset \mathsf{Ker}(u - \lambda \mathsf{Id}_E)^3$$

On détermine une base (e_1) de $\mathsf{Ker}(u - \lambda \mathsf{Id}_E)$ de sorte que $\mathsf{Ker}(u - \lambda \mathsf{Id}_E) = \mathsf{Vect}(e_1).$
On complète cette dernière en une base (e_1, e_2) de $\mathsf{Ker}(u - \lambda \mathsf{Id}_E)^2$ telle que :

$$\mathsf{Ker}(u - \lambda \mathsf{Id}_E)^2 = \mathsf{Vect}(e_1, e_2)$$

On complète cette dernière famille en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathsf{Ker}(u - \lambda \mathsf{Id}_E)^3 = E.$
On obtient :

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & \times & \times \\ 0 & \lambda & \times \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On trouve $\chi_A = (X+1)^3$ de sorte que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1\}$. On calcule ensuite

$$\mathrm{Ker}\,(A + I_3) = \mathrm{vect}\,(C_1) \quad \mathrm{Ker}\,(A + I_3)^2 = \mathrm{vect}\,(C_1, C_2) \quad \mathrm{Ker}\,(A + I_3)^3 = \mathrm{vect}\,(C_1, C_2, C_3)$$

avec

$$\mathrm{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{C}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\mathrm{AC}_1 = -\mathrm{C}_1 \quad \mathrm{AC}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2 \quad \mathrm{AC}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = -\mathrm{C}_1 - 2\mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_3$$

On en déduit qu'en posant $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$.

Exemple : Trigonalisons

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = (1 - X)^2 (2 - X)$$

$$\boldsymbol{E_2} : (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 & = 0 \\ -6x_1 - 4x_2 + 5x_3 & = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ -\frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E_1} : (A - I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ -6x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A est trigonalisable, non diagonalisable.

Notons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et prenons $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui libre avec (e_1, e_2). On a $Ae_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2e_1 + 4e_2 + e_3$ donc

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Exercice A22 : Trigonaliser la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4.5 Matrices et endomorphismes nilpotents

Dans ce paragraphe, la lettre E désigne un espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 52

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Il est dit nilpotent si, et seulement si, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Remarques :

1. Cette définition s'étend aux endomorphismes d'espaces vectoriel non nécessairement de dimension finie.
2. Si p est tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors pour tout $q \geqslant p$ on a encore $u^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Définition 53

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Il existe un plus petit entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ c'est-à-dire,

$$u^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$$

On l'appelle l'indice de nilpotence de l'endomorphisme u.

Preuve :
Premier cas : Si $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On remarque que $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et $u^1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. L'indice de nilpotence de u est alors 1.

Deuxième cas : Si $u \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Considérons l'ensemble :

$$C = \left\{ k \in \mathbf{N}^* \mid u^k = 0_{\mathcal{L}(E)} \right\}$$

C est un sous-ensemble de $\mathbb{N}^*$non vide (car u est nilpotent).
Il admet donc un plus petit élément noté $p \in \mathbb{N}$. On sait que $p \in C$ et $p - 1 \notin C$

$$u^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$$

□

Exemples :

1. L'indice de nilpotence de $0_{\mathcal{L}(E)}$ est 1.
2. Pour $E = \mathbb{K}_n[X]$. L'endomorphisme de dérivation

$$\Delta : \begin{cases} E \to E \\ P \mapsto P' \end{cases}$$

est nilpotent car $\Delta^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Définition 54

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice.
On dit que la matrice A est nilpotente si, et seulement si, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_{M_n(\mathbb{K})}$.
On définit de même l'indice de nilpotence d'une matrice nipotente.

Exemples :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = 0_{M_2(\mathbb{K})}$.

2. De manière générale si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est de taille n, on a $A^n = 0_{M_n(\mathbb{K})}$ et $A^{n-1} \neq 0_{M_n(\mathbb{K})}$.

Proposition 55

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'endomorphisme u est nilpotent.
2. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u)$ est nilpotente.
3. Il existe une base $\mathcal{B}$ tel que $\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u)$ est nilpotente.

Preuve : i) $\Rightarrow$ ii) Supposons que u est nilpotent. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u)$. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$,

$$A^p = \underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}\,(u^p)$$

donc pour tout entier p supérieur à l'indice de nilpotence de u on a $A^p = 0_{M_n(\mathbb{K})}$. La matrice A est nilpotente.

ii) $\Rightarrow$ iii) est vraie

iii) $\Rightarrow$ i) Soit $\mathcal{B}$ une base de$E$ telle que $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u)$ soit nilpotente d'indice $q \in \mathbb{N}$.

$$0_{M_n(\mathbb{K})} = A^q = \underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}\,(u^q)$$

donc $u^q = 0_{L(E)}$. L'endomorphisme u est donc nilpotent. □

Remarque : En particulier si A et B sont deux matrices semblables et que A est nilpotente alors B l'est aussi. En effet si $B = P^{-1}AP$ alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad B^p = P^{-1}A^pP$$

Exercice A23 :

1. Soit N une matrice nilpotente, montrer que $A = I + N$ est inversible et calculer A^{-1}.
2. Montrer que si A et B sont nilpotentes et que $AB = BA$ alors $A + B$ est nilpotente. Trouver A et B nilpotente telles que $A + B$ ne soit pas nilpotente.
3. Déterminer les matrices diagonalisables et nilpotentes.

Théorème 56 (Critère de nilpotence d'un endomorphisme)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'endomorphisme u est nilpotent.
2. Il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u)$ soit triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale (triangulaire stricte)
3. L'endomorphisme u est trigonalisable et sa seule valeur propre est 0.
4. Le polynôme caractéristique de u est $\chi_u = X^n$.

Preuve : Les équivalences 2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4) sont vraies.
Prouvons que 1) $\Rightarrow$ 4)
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice r. Montrons, par récurrence sur n, que son polynôme caractéristique est X^n.
Si $n = 1$, alors, comme $\mathsf{Ker}\, u \neq \{0_E\}$, alors $\mathsf{Ker}(u) = E$, $u = 0_{L(E)}$. On en déduit que $\chi_u = X$.
Supposons le résultat vérifié pour les espaces vectoriels de dimension strictement inférieure à celle de E.

Comme u n'est pas injectif, il existe un vecteur x non nul appartenant au noyau de u. Complétons x en une base $\mathcal{B}$ de E, de sorte que :

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

où $L \in M_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $A \in M_{n-1}(\mathbb{K})$.
On vérifie alors à l'aide d'un calcul matriciel par blocs que

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}\left(u^r\right) = \begin{pmatrix} 0 & L' \\ 0 & A^r \end{pmatrix}$$

Ainsi $A^r = 0_{M_{n-1}(\mathbb{K})}$ donc l'endomorphisme canoniquement associé à A est nilpotent. Par hypothèse de récurrence, on a $\chi_A = X^{n-1}$, ce qui permet de conclure car

$$\chi_u = X \times \chi_A(X)$$

Prouvons que 4) $\implies$ 1) Supposons que $\chi_u = X^n$ qui est scindé. Ainsi $\mathsf{Sp}(u) = \{0\}$. Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
Comme la diagonale de cette matrice est formée de la liste des valeurs propres de u, cette matrice est triangulaire supérieure stricte :

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $u(e_1) = 0_E$ et :

$$\forall i \in [\![2, n]\!], \quad u(e_i) \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{i-1}).$$

Par suite, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $u^{i-1}(e_i) \in \operatorname{Vect}(e_1)$ puis $u^i(e_i) = 0_E$. On en déduit que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u^n(e_i) = 0_E$, et donc que $u^n = 0_{L(E)}$. L'endomorphisme u est bien nilpotent. □

Corollaire 57

Soit u un endomorphisme nilpotent de E, son indice de nilpotent est inférieur ou égal à la dimension de E.

Théorème 58 (Critère de nilpotence d'une matrice)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La matrice A est nilpotente.
2. A est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale (triangulaire stricte).
3. La matrice A est trigonalisable et sa seule valeur propre est 0.
4. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^n$.

Exercice E24 :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que la matrice A est nilpotente et que la matrice B commute avec A. Que dire de $\operatorname{Tr}(AB)$?

Exercice E25 :
Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente telles que

$$AN = NA$$

Montrer que :

$$\det(A + N) = \det A$$

Exercice E26 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose χ_A scindé. Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{Sp}\left(A^k\right) = \left\{\lambda^k \mid \lambda \in \operatorname{Sp}(A)\right\}$$