Chapitre 5

Espaces vectoriels normés 1

Sommaire

5.1 Normes

5.1.1 Généralités

Définition 1 (Norme)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit que N est une norme sur E si, et seulement si,

1. N est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ (Existence et positivité).
2. $\forall x \in E, \quad (N(x) = 0 \implies x = 0_E)$ (Séparation).
3. $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in K, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (Homogénéité).
4. $\forall x, y \in E, \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ (Inégalité triangulaire).

Lorsque E est muni d'une norme N, on dit que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé.

Remarques :

1. Dans les exercices, les normes sont souvent définies comme des bornes supérieures, des sommes de séries ou des intégrales, il est nécessaire de justifier soigneusement l'existence de ces quantités.
2. Il existe d'autres notations pour désigner une norme : $\|\cdot\|$, ν, ... avec éventuellement des indices.

Proposition 2

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On a alors :

1. $N(0_E) = 0$
2. $\forall x, y \in E, \quad |N(x) - N(y)| \leqslant N(x+y)$ (Deuxième inégalité triangulaire).
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad N\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| N(x_k)$ (Sous-linéarité).

Preuve :

1. Remarquons que :
$$N(0_E) = N(0.0_E) = |0| N(0_E) = 0.$$
2. Soit $x, y \in E$, appliquons l'inégalité triangulaire :
$$N(x) = N(x + y + (-y)) \leqslant N(x+y) + N(-y) = N(x+y) + |-1| N(y) = N(x+y) + N(y).$$
Par conséquent :
$$N(x) - N(y) \leqslant N(x+y) \quad (1)$$
Les vecteurs x et y jouent des rôles symétriques, on a aussi : $N(y) - N(x) \leqslant N(x+y)$, ce qui revient à :
$$-N(x+y) \leqslant N(x) - N(y) \quad (2)$$
D'après (1) et (2), on a bien :
$$|N(x) - N(y)| \leqslant N(x+y).$$
3. L'inégalité se démontre à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Définition 3

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On dit qu'un vecteur x de E est unitaire ou normé si, et seulement si,

$$N(x) = 1.$$

5.1.2 Distance associée à une norme

Définition 4

Soit X un ensemble non vide. On appelle distance sur X toute application

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

vérifiant :

1. Pour tout $x, y \in X$, $d(x,y) \geqslant 0$.
2. Pour tout $x, y \in X$, $(d(x,y) = 0 \iff x = y)$.
3. Pour tout $x, y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$.
4. Pour tout $x, y, z \in X$, $d(x,y) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ (Inégalité triangulaire)

On dit que le coupe (X, d) est un espace métrique.

Définition 5

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. L'application :

$$d_N : \begin{cases} E \times E \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \|x - y\| \end{cases}$$

est une distance sur E. On l'appelle distance associée à la norme N.

Remarques :

1. Il existe des distances qui ne sont associées à aucune norme.
2. Une distance d associée à une norme d'un espace vectoriel E vérifie deux autres propriétés :
   - Pour tout $x, y \in X$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y)$ (Homogénéité).
   - Pour tout $x, y, a \in X$, $d(x+a, y+a) = d(x,y)$ (Invariance par translation).

   Si d est une distance définie sur un espace vectoriel normé vérifiant les deux propriétés précédentes, alors l'application $x \mapsto d(x, 0_E)$ est une norme sur E.

Exemples :

1. Définissons la distance dite "discrète" δ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

   On vérifie que δ est une distance sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle n'est pas associée à une norme. En effet :

$$\delta(4,4) = \delta(1,1) = 1 \neq |4|\delta(1,1).$$

2. Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, on définit la distance

$$d : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+ \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Même si d est définie à partir de la norme $\|\cdot\|_2$, la distance "SNCF" n'est pas associée à une norme car l'invariance par translation n'est pas définie. En effet, en notant $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$:

$$d(e_1, 0_E) = 1 \quad \text{et} \quad d(e_1 + e_2, e_2) = 1 + \sqrt{2} \neq d(e_1, 0_E).$$

Exercice E1 : Soit (X, d) un espace métrique. Soir A une partie non vide de X. Soit $x \in X$. On appelle distance de x à A le réel positif

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

1. Justifier que $d(x, A)$ est bien définie.
2. Vérifier que :
$$x \in A \implies d(x, A) = 0$$
Vérifier pour $X = \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$ (à choisir) que la réciproque est en général fausse.
3. Montrer que :
$$\forall x, y \in X, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y).$$

5.2 Normes classiques

Rappelons un lemme rencontré en MPSI qui sera utilise par la suite :

Lemme 6

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et$k \in \mathbb{R}_+, \quad \sup(kA) = k\sup(A).$

5.2.1 Normes euclidiennes

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ Rappelons la définition d'un produit scalaire.

Définition 7

On dit qu'une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} E \times E \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \end{cases}$ est un produit scalaire sur E si, et seulement si :

1. $\forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \langle \lambda x_1 + \mu x_2, y, \rangle = \lambda \langle x_1, y, \rangle + \mu \langle x_2, y, \rangle.$ (linéarité à gauche)
2. $\forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \langle x, \lambda y_1 + \mu y_2, \rangle = \lambda \langle x, y_1, \rangle + \mu \phi(x, y_2).$ (linéarité à droite)
3. $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, y, \rangle = \langle y, x, \rangle.$ (symétrie)
4. $\forall x \in E, \quad \langle x, x \rangle \geqslant 0.$ (positivité)
5. Soit $x \in E, \quad (\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0_E.)$ (caractère "définie")

Un produit scalaire ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
On dit que (E, ϕ) est un espace préhilbertien réel.

Donnons une proposition qui est utilisée en pratique pour montrer qu'une application est un produit scalaire :

Proposition 8

On considère une application :

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} E\times E \to \mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto \langle x,y\rangle \end{cases}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E si, et seulement si :

1. $\forall (x,y)\in E^2,\quad \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle.$ (symétrie)
2. $\forall (x,y_1,y_2)\in E^3,\quad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{R},\quad \langle x,\lambda y_1+\mu y_2\rangle = \lambda\langle x,y_1\rangle+\mu\langle x,y_2\rangle.$ (linéarité à droite)
3. $\forall x\in E,\quad \langle x,x\rangle \geqslant 0.$ (positivité)
4. Soit $x\in E,\quad (\langle x,x\rangle = 0 \implies x=0_E.)$ (caractère "définie")

Preuve : On peut se passer de la linéarité à gauche. Montrons que celle-ci s'obtient à partir de la symétrie et de la linéarité à droite. Soit $(y,x_1,x_2)\in E^3$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, évaluons :

$$\begin{array}{rcll} \langle \lambda x_1+\mu x_2, y\rangle & = & \langle y,\lambda x_1+\mu x_2\rangle & \text{(symétrie)} \\ & = & \lambda\langle y,x_1\rangle+\mu\langle y,x_2\rangle & \text{(linéarité à droite)} \\ & = & \lambda\langle x_1,y\rangle+\mu\langle x_2,y\rangle & \text{(symétrie)} \end{array}$$

En conclusion, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien linéaire à gauche. □

Exemples : Donnons des exemples de produits scalaires rencontrés en MPSI

1. L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définie par :

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto \langle x,y\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^n x_k y_k \end{cases} \quad \text{où } x=(x_1,\dots,x_n) \text{ et } y=(y_1,\dots,y_n)$$

est un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ que l'on appelle produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

2. L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définie par :

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \left\{ \begin{array}{cl} M_{n,1}(\mathbb{R})\times M_{n,1}(\mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ (X,Y) & \mapsto \langle X,Y\rangle = {}^tXY \end{array}\right.$$

est un produit scalaire de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on appelle produit scalaire canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

3. L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définie par :

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \left\{ \begin{array}{cl} M_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto \langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB) \end{array}\right.$$

est un produit scalaire de $M_n(\mathbb{R})$ que l'on appelle produit scalaire canonique de $M_n(\mathbb{R})$.
Si $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a l'égalité :

$$\langle A,B\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{i,j}.$$

4. Soit $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $-\infty<a<b<+\infty$. On note $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. L'application :

$$(\cdot|\cdot) : \left\{ \begin{array}{cl} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})\times\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto (f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt \end{array}\right.$$

est un produit scalaire de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Théorème 9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E.

1. $\forall x, y \in E, \quad |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ ce qui revient à $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$.
2. Cas d'égalité : Soit $x, y \in E$, on les équivalences :

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\| \iff (x, y) \text{ est liée } \iff x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}$$

Définition 10

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E. L'application :

$$\| \cdot \| : \begin{cases} E \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{cases}$$

est une norme sur E. On l'appelle norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exemples : Reprenons les produits scalaires précédents, on obtient ainsi des normes euclidiennes :

1. L'application $\|\cdot\|_2$ définie par :

$$\|\cdot\|_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \end{cases}$$

   est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. L'application $\|\cdot\|_2$ définie par :

$$\|\cdot\|_2 : \begin{cases} M_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+ \\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{{}^tXX} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \end{cases}$$

   est une norme sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. L'application $\|\cdot\|_2$ définie par :

$$\|\cdot\|_2 : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) & \to \mathbb{R}^+ \\ A = (a_{i,j}) & \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tAA)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2} \end{cases}$$

   est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$
4. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $-\infty < a < b < +\infty$. L'application :

$$\|\cdot\|_2 : \begin{cases} \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) & \to \mathbb{R}^+ \\ f & \mapsto \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \end{cases}$$

   est une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Théorème 11 (Règles de calcul)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E.

1. $\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$
2. $\forall x, y \in E, \quad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$
3. $\forall x, y \in E, \quad \langle x+y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$.
4. $\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (Identité du parallélogramme)
5. $\forall x, y \in E, \quad \langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ (Identité de polarisation)

Définition 12

Soit I un intervalle. On note $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont le carré est intégrable :

$$\mathcal{L}^2(I, \mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \mid \int_I f^2(t)dt \text{ est convergente} \right\}$$

1. $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$
2. L'application :

$$(\cdot|\cdot) : \begin{cases} \mathcal{L}^2(I, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}^2(I, \mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto (f|g) = \displaystyle\int_I f(t)g(t)dt \end{cases}$$

   est un produit scalaire de $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{R})$.

3. La norme euclidienne associée est l'application :

$$\|\cdot\|_2 : \begin{cases} \mathcal{L}^2(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+ \\ f \mapsto \sqrt{\displaystyle\int_I f^2(t)dt} \end{cases}$$

   que l'on appelle norme de la moyenne quadratique.

Définition 13

On note $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'ensemble des suites (u_n) à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\sum u_n^2$ converge

$$\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n^2 \text{ est convergente} \right\}$$

1. $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
2. L'application :
$$(\cdot|\cdot) : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) \times \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto (u|v) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \end{cases}$$
est un produit scalaire de $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
3. La norme euclidienne associée est l'application :
$$\|\cdot\|_2 : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+ \\ u \mapsto \sqrt{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2} \end{cases}$$

5.2.2 Dans $\mathbb{K}^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Définition 14

1. On appelle norme 1 sur $\mathbb{K}^n$, l'application :
$$\|\cdot\|_1 : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k| \end{cases}$$
2. On appelle norme 2 sur $\mathbb{K}^n$, l'application :
$$\|\cdot\|_2 : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \end{cases}$$
3. On appelle norme infinie sur $\mathbb{K}^n$, l'application :
$$\|\cdot\|_\infty : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto \displaystyle\max_{k\in[\![1,n]\!]} |x_k| \end{cases}$$

Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

5.2.3 Dans un espace de dimension finie

Définition 15

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E fixé.

1. On appelle norme 1 sur E, l'application :

$$\|\cdot\|_{1,\mathcal{B}} : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |e_k^*(x)| \end{cases}$$

2. On appelle norme 2 sur $\mathbb{K}^n$, l'application :

$$\|\cdot\|_{2,\mathcal{B}} : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |e_k^*(x)|^2} \end{cases}$$

3. On appelle norme infinie sur $\mathbb{K}^n$, l'application :

$$\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}} : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \displaystyle\max_{k \in [\![1,n]\!]} |e_k^*(x)| \end{cases}$$

Les applications $\|\cdot\|_{1,\mathcal{B}}$, $\|\cdot\|_{2,\mathcal{B}}$ et $\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}}$ sont des normes sur E.

Exercice E2 :
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. On se donne $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n$. Montrer que l'application

$$\mathrm{N} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \longmapsto \left\| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| \end{cases}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre.

Exercice A3 :

Soit $E = \mathbb{C}^n$ et $(e_1, \cdots e_n)$ une base de E. Soit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$. On note $\|\cdot\|_p$ la norme définie sur E par $\|x\|_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ et $\|\cdot\|_\infty$ la norme définie par $\|x\|_\infty = \displaystyle\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.

1. Démontrer que $\|x\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$.
2. Démontrer que $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

5.2.4 Dans les espaces de matrices

Définition 16

1. On appelle norme 1 sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application :

$$\|\cdot\|_1 : \begin{cases} M_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+ \\ A = (a_{i,j}) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}| \end{cases}$$

2. On appelle norme 2 sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application :

$$\|\cdot\|_2 : \begin{cases} M_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+ \\ A = (a_{i,j}) \mapsto \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}|^2} \end{cases}$$

3. On appelle norme infinie sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application :

$$\|\cdot\|_\infty : \begin{cases} M_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+ \\ A = (a_{i,j}) \mapsto \displaystyle\max_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} |a_{i,j}| \end{cases}$$

Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice E4 :
Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose

$$\mathrm{N}_1(\mathrm{A}) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{p}|\mathrm{A}_{i,j}| \quad \mathrm{N}_2(\mathrm{A}) = \max_{1\leqslant j\leqslant p}\sum_{i=1}^{n}|\mathrm{A}_{i,j}|$$
$$\mathrm{N}_3(\mathrm{A}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\mathrm{A}_{i,j}^2}$$

Montrer que $\mathrm{N}_1,\ \mathrm{N}_2,\ \mathrm{N}_3$ sont des normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

5.2.5 Dans les espaces des suites

Définition 17

On note :

$$\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K}) = \left\{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\geqslant 0}|u_n| \text{ converge}\right\}$$

L'ensemble $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni de la norme 1 :

$$\|\cdot\|_1 : \begin{cases} \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+ \\ (u_n) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n| \end{cases}$$

Définition 18

On note : $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites bornées de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
L'ensemble $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ muni de la norme infinie :

$$\|\cdot\|_\infty : \begin{cases} \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+ \\ (u_n) \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \end{cases}$$

5.2.6 Dans les espaces de fonctions

Définition 19

Soit I un intervalle. On note :

$$\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^{pm}(I,\mathbb{K}) \mid \int_I |f(t)|dt \text{ converge} \right\}$$

L'ensemble $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^{pm}(I,\mathbb{K})$ muni de la norme 1 :

$$\|\cdot\|_1 : \begin{cases} \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+ \\ f \mapsto \int_I |f(t)|dt \end{cases}$$

Définition 20

Soit A un ensemble non vide. On note $\mathcal{L}^\infty(A,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées sur A.
L'ensemble $\mathcal{L}^\infty(A,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ muni de la norme infinie :

$$\|\cdot\|_\infty : \begin{cases} \mathcal{L}^\infty(A,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+ \\ f \mapsto \sup_{x\in A} |f(x)| \end{cases}$$

Exercice A5 :
Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin^n(x)\cos(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n\|_\infty$

5.2.7 Dans les espaces de polynômes

Rappelons que l'on peut écrire tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ sous la forme :

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite nulle à partir d'un certain rang.

Définition 21

1. On appelle norme 1 sur $\mathbb{K}[X]$, l'application :

$$\|\cdot\|_1 : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{R}^+ \\ P = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \end{cases}$$

2. On appelle norme 2 sur $\mathbb{K}[X]$, l'application :

$$\|\cdot\|_2 : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{R}^+ \\ P = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \mapsto \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2} \end{cases}$$

Exercice C6 : [Mines-Télécom]
On pose pour une partie A de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \mathrm{N}_{\mathrm{A}}(\mathrm{P}) = \sup_{x\in\mathrm{A}} |\mathrm{P}(x)|$.
À quelle condition nécessaire et suffisante N_{A} est-elle une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$?

5.2.8 Produit fini d'espaces vectoriels normés

Définition 22

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(E_1, N_1), \dots, (E_n, N_n)$ des espaces vectoriels normés. L'application :

$$N : \begin{cases} E_1 \times \cdots \times E_n \to \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} N_k(x_k) \end{cases}$$

est une norme sur l'espace vectoriel produit $\prod\limits_{k=1}^{n} E_k$. Cette norme est appelée norme produit.

Preuve :

1. L'application N est bien définie en tant que maximum d'un nombre fini de réels. Vérifions que N est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Remarquons que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $N_k(x_k) \geqslant 0$. Ainsi :
$$N(x) = \max_{k \in [\![1,n]\!]} N_k(x_k) \geqslant 0$$
2. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Supposons que $N(x) = 0$. Ainsi : $\max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} N_k(x_k) = 0$. Ainsi :
$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad N_k(x_k) \leqslant 0.$$
Or par positivité des normes,
$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad N_k(x_k) \geqslant 0.$$
Par antisymétrie,
$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad N_k(x_k) = 0.$$
La propriété de séparation des normes donne :
$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad x_k = 0_{E_k}.$$
Finalement $x = (0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$. On a prouvé que :
$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \left(N(x) = 0 \implies x = (0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})\right)$$
3. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Rappelons que :
$$\lambda.x = \lambda.(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$
$$\begin{aligned} N(\lambda x) &= \max_{k \in [\![1,n]\!]} N_k(\lambda x_k) = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |\lambda| N_k(x_k) \quad \text{(homogénéité)} \\ &= |\lambda| \max_{k \in [\![1,n]\!]} N_k(x_k) = |\lambda| N(x). \end{aligned}$$
4. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Remarquons que :
$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,
$$\begin{aligned} N_k(x_k + y_k) &\leqslant N_k(x_k) + N_k(y_k) \quad \text{(Inégalité triangulaire pour } N_k\text{)} \\ &\leqslant \max_{k \in [\![1,n]\!]} |\lambda| N_k(x_k) + \max_{k \in [\![1,n]\!]} |\lambda| N_k(y_k) \leqslant N(x) + N(y) \end{aligned}$$
On en déduit que :
$$\max_{k \in [\![1,n]\!]} |\lambda| N_k(x_k + y_k) \leqslant N(x) + N(y).$$
$$N(x + y) \leqslant N(x) + N(y).$$

□

5.3 Quelques définitions ensemblistes

5.3.1 Boules ouvertes et fermées

Définition 23

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit d la distance associé. Soit $a \in E$ et $r \in]0, +\infty[$. On appelle :

1. On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble :
$$B(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) < r\}$$
$B(a, r)$ est l'ensemble des éléments de E dont la distance à a est strictement inférieure à r.
2. On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble :
$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) \leqslant r\}$$
$\overline{B}(a, r)$ est l'ensemble des éléments de E dont la distance à a est inférieure ou égale à r.
3. On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble :
$$S(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) = r\}$$
$S(a, r)$ est l'ensemble des éléments de E dont la distance à a est égale à r.

Remarque : Dans le cas où $a = 0_E$ et $r = 1$, les ensembles $B(0_E, 1), \overline{B}(0_E, 1), S(0_E, 1)$ sont appelés respectivement boule unité ouverte, boule unité fermé, sphère unité.

Définition 24

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit u, v deux vecteurs de E. On appelle segment $[u, v]$ l'ensemble
$$[u, v] = \{tu + (1 - t)v, t \in [0, 1]\}$$
2. Soit A une partie de E, elle est dite convexe si, et seulement si, pour tout couple $(u, v) \in E^2, [u, v] \subset A$.

Proposition 25

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Les boules ouvertes (respectivement fermées) sont convexes.

Preuve : Soit $B(a, \delta)$ une boule ouverte. Soit x, y deux éléments de la boule. On sait que par définition $\|x - a\| < \delta$ et $\|y - a\| < \delta$.
Soit $z = tx + (1 - t)y$ un élément du segment $[x, y]$ où $t \in [0, 1]$. On a

$$d(z, a) = \|z - a\| = \|t(x - a) + (1 - t)(y - a)\| \leqslant t\|x - a\| + (1 - t)\|y - a\| < t\delta + (1 - t)\delta = \delta.$$

On en déduit que $z \in B(a, \delta)$ et donc que $[x, y] \subset B(a, \delta)$.
En conclusion, $B(a, \delta)$ est bien convexe.

Le raisonnement est similaire pour les boules fermées. □

5.3.2 Parties, suites et fonctions bornées

Définition 26

Soir $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soit X une partie de E. On dit que X est bornée si, et seulement si, il existe $M \in \mathbb{R}^+$,
$$\forall x \in X, \quad \|x\| \leqslant M.$$
2. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{K}}$. On dit que la suite (u_n) est bornée si, et seulement si, il existe $M \in \mathbb{R}^+$,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\| \leqslant M.$$
3. Soit A un ensemble. Soit $f \in \mathcal{F}(A, E)$. On dit que f est bornée sur X si, et seulement si, il existe $M \in \mathbb{R}^+$,
$$\forall x \in A, \quad \|f(x)\| \leqslant M.$$

Exemple :
On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique, prouvons que $O_n(\mathbb{R})$ est borné. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$.
$$\|M\| = \sqrt{\mathsf{Tr}(M^\top M)} = \sqrt{\mathsf{Tr}(I_n)} = \sqrt{n}$$
On en déduit que $O_n(\mathbb{R})$ est borné.

Proposition 27

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit X une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'ensemble X est borné.
2. Il existe $M \in \mathbb{R}^+$, $X \subset B(0_E, M)$.
3. Il existe $a \in E$, il existe $M \in \mathbb{R}^+$, $X \subset B(a, M)$.

Preuve : Prouvons que 3) $\Rightarrow$ 1)
Soit $a \in E$ et $M \in \mathbf{R}$ tel que $X \subset B(a, M)$. Trouvons un réel M' tel que $B(a, M) \subset B(0_E, M')$. Posons : $M' = M + d(a, 0_E)$ et on a que pour $x \in B(a, M)$,
$$d(0_E, x) \leqslant d(0_E, a) + d(a, x) \leqslant d(0_E, a) + M = M'.$$

$\square$

5.4 Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

5.4.1 Définition et propriétés

Définition 28

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite à valeurs dans E. Soit $\ell \in E$. On dit que la suite (u_n) admetl ℓ pour limite si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \geqslant n_0, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad (n \geqslant N_\varepsilon \implies \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon)\,.$$

Ce qui revient à :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \geqslant n_0, \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ et on dit que la suite (u_n) converge vers ℓ.

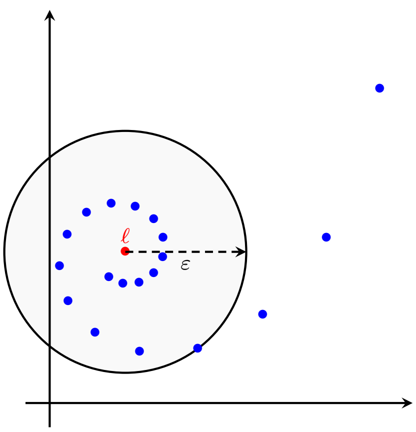
Remarques :

1. On peut remplacer $\|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$ par $u_n \in \overline{B}(\ell, \varepsilon)$ ou encore $d(u_n, \ell) \leqslant \varepsilon$.
2. Dans cette définition, on a privilégié les inégalités larges $\|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$, on peut aussi utiliser des inégalités strictes. En effet, la définition avec l'inégalité stricte implique celle avec l'inégalité large puisque $B(\ell, \varepsilon) \subset \overline{B}(\ell, \varepsilon)$. D'autre part, la définition avec l'inégalité large implique celle avec l'inégalité stricte car $\overline{B}(\ell, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(\ell, \varepsilon)$.
3. On dit que (u_n) est divergente si, et seulement si, la suite (u_n) n'est pas convergente.
4. On a les équivalences suivantes :

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \iff u_n - \ell \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \iff \|u_n - \ell\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Explications :



$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N_\varepsilon \in [\![n_0, +\infty[\![, \qquad \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

Quel que soit le rayon $\varepsilon > 0$ de la boule $\overline{B}(\ell, \varepsilon)$	Il existe un rang N_ε (qui dépend de ε) dans $[\![n_0, +\infty[\![$	À partir de ce rang N_ε, les termes de la suite rentrent dans $\overline{B}(\ell, \varepsilon)$

Théorème 29 (Unicité de la limite)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite à valeurs dans E. Soit $\ell \in E$.
Si la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ admet une limite ℓ alors cette limite est unique. La notation :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell.$$

est cohérente.

Théorème 30

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite à valeurs dans E. Si la suite (u_n) est convergente, alors elle est bornée.

Remarques :

1. La réciproque de ce théorème est fausse, nous verrons que la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (qui est bornée) est divergente.
2. Attention, il existe des suites non bornées comme $(n(-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui n'admettent pas de limite infinie.

Preuve : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E. . On suppose que (u_n) est convergente vers un réel $\ell \in E$. Montrons que la suite (u_n) est bornée.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. La définition de la limite assure que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

En prenant $\varepsilon = 1$. Il existe un entier $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N_1, \quad \|u_n - \ell\| \leqslant 1.$$

L'inégalité triangulaire assure que :

$$\forall n \geqslant N_1, \quad |\|u_n\| - \|\ell\|| \leqslant \|u_n - \ell\| \leqslant 1.$$

Ainsi :

$$\forall n \geqslant N_1, \quad \|u_n\| - \|\ell\| \leqslant 1.$$
$$\forall n \geqslant N_1, \quad \|u_n\| \leqslant 1 + \|\ell\|.$$

Remarquons que :

$$\forall n \in [\![0, N_1 - 1]\!], \quad \|u_n\| \leqslant \underbrace{\max(\|u_0\|, \|u_1\|, \dots, \|u_{N_1 - 1}\|)}_{=K}.$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\| \leqslant \max(K, 1 + \|\ell\|)$$

Le réel $\max(K, 1 + \|\ell\|)$ est une constante qui ne dépend pas de n.

En conclusion, la suite (u_n) est bornée. $\square$

5.4.2 Opérations sur les suites convergentes

Proposition 31

L'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.
Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et pour tout suites (u_n) et (v_n) convergentes alors la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

$$\lim_{n \to +\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim_{n \to +\infty} (u_n) + \mu \lim_{n \to +\infty} (v_n).$$

Proposition 32

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $\ell \in E$.

1. La suite réelle$(\|u_n\|)$ converge vers $\|\ell\|$.
2. Soit (λ_n) une suite de scalaire convergente vers Λ. La suite $(\lambda_n u_n)$ converge vers $\Lambda\ell$.

Proposition 33

Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ une algèbre munie d'une norme telle qu'il existe $C > 0$ vérifiant que pour tout x, y dans $\mathcal{A}$,

$$\left\{ \|x \times y\| \leqslant C\|x\|.\|y \quad \right|$$

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers ℓ et ℓ'. La suite $(u_n v_n)$ converge et

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n v_n) = \ell\ell'$$

Preuve : Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n v_n - \ell\ell'\| = \|u_n (v_n - \ell') + (u_n - \ell)\,\ell'\| \leqslant \|u_n (v_n - \ell')\| + \|(u_n - \ell)\,\ell'\|.$$

Or la suite (u_n) est bornée car convergente. Soit M est un majorant de $(\|u_n\|)$.
D'autre part, il existe une constante C telle que pour tout $(x, y) \in \mathcal{A}^2$, $\|x.y\| \leqslant C\|x\|\|y\|$. On en déduit que

$$0 \leqslant \|u_n v_n - \ell\ell'\| \leqslant C.M\,\|v_n - \ell'\| + C.\,\|\ell'\|\ \ \|u_n - \ell\| \xrightarrow[n \to +\infty]{0}$$

Le théorème d'encadrement des limites assure que $\|u_n v_n - \ell\ell'\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.
En conclusion :

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n v_n) = \ell\ell'$$

□

Définition 34 (Point adhérent à une partie)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. Soit $a \in E$.
On dit que a est adhérent à A si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de A convergeant vers a.

Exemples :

1. Le nombre réel 1 est par exemple un point adhérent à l'intervalle $[0, 1[$.
2. La matrice nulle est adhérent à $GL_n(\mathbb{C})$ puisque $\left(\frac{1}{p} I_n\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de $GL_n(\mathbb{C})$ convergeant vers la matrice nulle.

5.4.3 Convergence dans un produit d'espaces vectoriels normés

Proposition 35

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés. Rappelons que l'espace vectoriel produit $E = \prod_{k=1}^{p} E_k$ peut être muni de la norme produit définie par :

$$N : \begin{cases} E_1 \times \cdots \times E_p \to \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto \max_{k \in [\![1,p]\!]} N_k(x_k) \end{cases}$$

Soit (u_n) une suite à valeurs dans E. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (u_n(1), \dots, u_n(p)) \quad \text{où pour tout } k \in [\![1,p]\!],\ u_n(k) \in E_k$$

La suite (u_n) est convergente si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, les suites $(u_n(k))$ sont convergentes. Dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n(1), \dots, \lim_{n\to+\infty} u_n(p) \right).$$

Preuve : Supposons que la suite (u_n) est convergente de limite $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E$. Soit $k \in [\![1,p]\!]$, remarquons que :

$$0 \leqslant N_k(u_n(k) - \ell_k) \leqslant \max_{i \in [\![1,p]\!]} N_i(x_i - \ell_i) = N(u_n - \ell).$$

Or par définition : $\lim_{n\to+\infty} N(u_n - \ell) = 0$. Le théorème d'encadrement des limites assure que :

$$\lim_{n\to+\infty} N_k(u_n(k) - \ell_k) = 0$$

On en déduit que pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, la suite $(u_n(k))$ converge vers ℓ_k.

Réciproquement, supposons que pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, la suite $(u_n(k))$ converge vers un élément $\ell_k \in E_k$. Notons $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E$. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant N(u_n - \ell) = \max_{i \in [\![1,p]\!]} N_i(x_i - \ell_i) \leqslant \sum_{k=1}^{n} (N_k(u_n(k) - \ell_k))$$

Or par définition pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} (N_k(u_n(k) - \ell_k) = 0$. En tant que somme finie :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (N_k(u_n(k) - \ell_k)) = 0.$$

Le théorème d'encadrement des limites assure que :

$$\lim_{n\to+\infty} N(u_n - \ell) = 0.$$

Finalement, la suite (u_n) est convergente de limite $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E$. □

Proposition 36

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$.

1. La suite (u_n) est bornée si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(e_i^*(u_n))$ est bornée.
2. La suite (u_n) est convergente si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(e_i^*(u_n))$ est convergente.
   Dans ce cas, si on note ℓ la limite de (u_n), pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $e_i^*(\ell) = \lim_{n\to+\infty} (e_i^*(u_n))$.

Exemples :

1. Soit (A_p) une suite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note pour tout $p \in \mathbb{N}, \quad A_p = (a_{ij}(p))$.
   La suite (A_p) converge vers $M = (m_{ij})$ si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij}(p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} m_{ij}$.
2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ Soit A un matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) \subset \{z \in \mathbf{C} \quad | \quad |z| < 1\}$.
   Il existe alors $P \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ telle que $P^{-1}AP = D$ où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont de module strictement inférieurs à 1 . On les note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
   $$\forall p \in \mathbb{N}, \quad D^p = \left(P^{-1}AP\right)^p = P^{-1}A^pP$$
   Ainsi $A^p = PD^pP^{-1}$.
   Remarquons que $\|D^p\|_\infty = \left(\max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} |\lambda_i|\right)^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$. D'autre part
   $$\|A^p\|_\infty = \left\|PD^pP^{-1}\right\|_\infty \leqslant n^2 \|D^n\|_\infty \|P\|_\infty \left\|P^{-1}\right\|_\infty \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$
   Le théorème d'encadrement des limites assure que $A^p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

5.4.4 Suites extraites et valeurs d'adhérence d'une suite

Définition 37 (Suite extraite)

On appelle suite extraite ou sous-suite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E toute suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Remarques :

1. Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, alors
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geqslant n$$
2. En particulier $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Proposition 38

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) converge vers ℓ alors toute suite extraite de (u_n) converge encore vers ℓ.

Théorème 39

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite. On considère la suite d'indinces pairs (u_{2n}) et la suite d'indices impairs (u_{2n+1}).
Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ si, et seulement si, la suite (u_n) converge vers ℓ.

Définition 40 (Valeurs d'adhérence d'une suite)

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $x \in E$.
On dit que x est une valeur d'adhérence si, et seulement si, il existe une suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ qui converge vers x.

Proposition 41

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence qui est sa limite.

Remarque : On utilise souvent la contraposée de cette proposition pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite en trouvant deux suites extraites n'ayant pas la même limite.

Meth 42 (Pour prouver qu'une suite n'admet pas de limite)

Pour prouver qu'une suite (u_n) n'admet pas de limite, on peut mettre en évidence deux suites extraites de (u_n) admettant deux limites différentes.

Proposition 43

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Soit $x \in E$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'élément x est une valeur d'adhérence de la suite (u_n).
2. $$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbf{N}, \quad \exists n \geqslant N, \quad u_n \in B(x, \varepsilon).$$

Exercice E7 :
On considère E l'espace vectoriel des suites réelles bornées que l'on munit de la norme uniforme. On pose $u : n \in \mathbb{N} \mapsto (-1)^n$. Calculer la distance de u au sous-espace vectoriel F de E formé des suites convergentes.

Exercice E8 :
Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour tout $P \in E$, en notant $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite presque nulle de ses coefficients, on pose

$$\|P\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = X^n$. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais ne converge pas (au sens de $\|\cdot\|$).

Exercice A9 :
Soit A $\in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que la suite de terme général A^n converge vers L. Montrer que L est une matrice de projecteur.

Exercice E10 :
Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n^n = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$.

Exercice E11 :
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

1. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u) \oplus \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u)$.
2. Soit $x \in \mathrm{E}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)$. Montrer que (x_n) converge vers la projection de x sur $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E - u)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - u)$.

5.5 Normes équivalentes

5.5.1 Généralités

Définition 44 (Normes équivalentes)

Soit E un espace vectoriel. Soit N_1 et N_2 deux normes sur E.
On dit que N_1 est équivalentes à N_2 si, et seulement si, il existe $C_1, C_2 \in]0, +\infty[$ tels que pour tout $x \in E$:

$$\begin{cases} N_1(x) \leqslant C_1 N_2(x) \\ N_2(x) \leqslant C_2 N_1(x) \end{cases}$$

Remarque :
L'équivalence des normes N_1 et N_2 revient aussi à dire :

$$\exists \alpha, \beta \in]0, +\infty[, \quad \forall x \in E, \quad \alpha N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \beta N_2(x)$$

Proposition 45

La relation d'équivalence des normes d'un espace vectoriel porte bien son nom, c'est une relation d'équivalence.

5.5.2 Exemples

Proposition 46

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^p$ sont équivalentes. Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{K}^p$:

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant p\,\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{p}\,\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{p}\,\|x\|_2$$

Preuve : Soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$.
Il existe $j_0 \in [\![1, p]\!]$, $\|x\|_\infty = \max_{j \in [\![1,p]\!]} |x_j| = |x_{j_0}|$.

- $\|x\|_\infty = |x_{j_0}| \leqslant \sum_{j=1}^{p} |x_j| = \|x\|_1$
- $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{p} |x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{p} \|x\|_\infty = p\,\|x\|_\infty$.
- $\|x\|_\infty = |x_{j_0}| \leqslant \sqrt{|x_0|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{p} |x_j|^2} = \|x\|_2$.
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} |x_j|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \|x\|_\infty} = \sqrt{p}\,\|x\|_\infty$.
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} |x_j|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{p} |x_j|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} |x_i||x_j|} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{p} |x_j|\right)^2} = \|x\|_1$
- $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{p} (|x_j| \times 1) \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{p} |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{p} 1^2} = \sqrt{p}\,\|x\|_2$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Les constantes trouvées sont optimales car il y a égalité lorsque l'on choisit convenablement le vecteur x.

$\square$

5.5.3 Notions invariantes par des normes équivalentes

Proposition 47 (Invariance de la convergence)

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur un espace vectoriel E. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$.
La suite converge pour la norme N_1 si et seulement si elle converge pour la norme N_2.
Dans ce cas les limites sont les mêmes.

Preuve : On suppose que (u_n) converge vers ℓ pour N_1. Dans ce cas $(N_1(u_n - \ell))$ tend vers 0. Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, N_2(u_n - \ell) \leqslant C_2 N_1(u_n - \ell)$$

D'après le théorème d'encadrement des limites $N_2(u_n - \ell)$ tend aussi vers 0 et de ce fait, (u_n) tend vers ℓ pour N_2. □

Proposition 48 (Invariance du caractère borné)

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur un espace vectoriel E. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$.
La suite (u_n) est bornée pour la norme N_1 si, et seulement si, (u_n) est bornée pour la norme N_2.

Exemple :
Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ que l'on peut munir, au choix, des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$. Soit (f_n) la suite de fonctions définie par $f_n : t \mapsto t^n$.

1. La suite (f_n) converge vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|_1$ puisque :

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n \; \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. La suite (f_n) ne converge pas vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ puisque $\|f_n\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |t^n| = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Proposition 49 (pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes)

Soit E un espace vectoriel. Soit N_1 et N_2 deux normes sur E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.
2. Il existe une suite$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \neq 0_E \\ \\ \dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \text{où } \ell \in \{0, +\infty\} \end{cases}$$

Preuve : Supposons que les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes. Ainsi :

$$\forall C_1, C_2 \in]0,+\infty[, \quad \exists x \in E, \quad (N_1(x) > C_1 N_2(x) \quad \text{ou} \quad N_2(x) > C_2 N_1(x))$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, prenons $C_1 = C_2 = n$. Il existe $z_n \in E$ tel que :

$$N_1(z_n) > n N_2(z_n) \quad \text{ou} \quad N_2(z_n) > n N_1(z_n)$$

Remarquons que z_n est nécessairement différent de 0_E, car sinon on aurait une contradiction $0 > 0$.

$$\frac{N_1(z_n)}{N_2(z_n)} > n \quad \text{ou} \quad \frac{N_2(z_n)}{N_1(z_n)} > n$$

Introduisons :

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \frac{N_1(z_n)}{N_2(z_n)} > n \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \frac{N_2(z_n)}{N_1(z_n)} > n \right\}$$

Remarquons que $A \cup B = \mathbb{N}^*$. Comme $\mathbb{N}^*$ est infinie, l'une au moins des parties A ou B est infinie.
Supposons par exemple qu'il s'agit de A. Il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\varphi(\mathbb{N}) = A$.
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{N_1(z_{\varphi(n)})}{N_2(z_{\varphi(n)}}) > \varphi(n)$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$. Le théorème de comparaison des limites assure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{N_1(z_{\varphi(n)})}{N_2(z_{\varphi(n)}}) = +\infty.$$

En posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = z_{\varphi(n)}$ est bien un élément non nul de E et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} = +\infty.$$

Réciproquement, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \neq 0_E \\ \\ \dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \text{où } \ell \in \{0, +\infty\} \end{cases}$$

et que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes. Il existe $C_1, C_2 \in]0, +\infty[$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad \frac{1}{C_2} N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant C_1 N_2(x)$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{C_2} N_2(x_n) \leqslant N_1(x_n) \leqslant C_1 N_2(x_n)$$

$$\frac{1}{C_2} \leqslant \frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \leqslant C_1$$

En faisant tendre n vers $+\infty$,

$$0 < \frac{1}{C_2} \leqslant \ell \leqslant C_1 < +\infty$$

ce qui contredit le fait que $\ell \in \{0, +\infty\}$. En conclusion, les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

□

Proposition 50 (Comparaison des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$)

Rappelons que $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.
Les $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ de $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ ne sont pas équivalentes. On a tout de même les inégalités :

$$\forall u \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \quad \begin{cases} \|u\|_\infty \leqslant \|u\|_1 \\ \|u\|_\infty \leqslant \|u\|_2 \\ \|u\|_2 \leqslant \|u\|_1 \end{cases}$$

Preuve : Soit $u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| = \|u\|_1$$

Ainsi

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \leqslant \|u\|_1$$

D'autre part,

$$|u_n| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^2} = \|u\|_1$$

Par conséquent :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \leqslant \|u\|_2$$

Enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a vu que :

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{n} |u_k|^2} \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^2} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| = \|u\|_1 .$$

Pour montrer que les normes ne sont pas équivalentes, considérons la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad U_n(p) = \begin{cases} 1 \text{ si } p \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(U_n(p))_{p\in\mathbb{N}}$ est bien un élément de $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ et :

$$\|U_n\|_\infty = 1, \quad \|U_n\|_1 = \sum_{j=0}^{n} 1 = n+1, \quad \|U_n\|_2 = \sqrt{\sum_{j=0}^{n} 1} = \sqrt{n+1}.$$

Par conséquent :

$$\frac{\|U_n\|_1}{\|U_n\|_\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty, \quad \frac{\|U_n\|_2}{\|U_n\|_\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty, \quad \frac{\|U_n\|_1}{\|U_n\|_2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

En conclusion, les $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ de $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ ne sont pas équivalentes. □

Proposition 51 (Comparaison des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur l'ensemble des fonctions continues)

Rappelons que $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ peut être muni des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$
Les $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ ne sont pas équivalentes. On a tout de même les inégalités :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K}), \quad \begin{cases} \|f\|_1 \leqslant (b-a)\,\|f\|_\infty \\ \|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_2 \\ \|f\|_2 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty \end{cases}$$

<u>Preuve</u> : Considérons la suite de fonctions (f_n) à valeurs dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f_n : t \mapsto \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^n$$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = 1$. Les fonctions f_n admettent en b un maximum commun qui vaut 1. D'autre part :

$$\begin{cases} \|f_n\|_1 = \displaystyle\int_a^b f_n(t)dt = \left[\frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)(b-a)^n}\right]_a^b = \frac{b-a}{n+1} \\ \|f_n\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_a^b (f_n(t))^2\,dt} = \sqrt{\left[\frac{(t-a)^{2n+1}}{(2n+1)(b-a)^{2n}}\right]_a^b} = \sqrt{\frac{b-a}{2n+1}} \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \quad \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \quad \frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En conclusion, les $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ ne sont pas équivalentes. □

Exercice C12 :
On note $E=C^{0}([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f\in E$, on note

$$\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad N(f)=\int_0^1 t|f(t)|\mathrm{d}t$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n : t\mapsto \begin{cases} n(1-nt) & \text{si } t\in[0,1/n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Calculer $N\left(f_n\right)$ en fonction de n et vérifier que $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle au sens de N.
3. Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer $\left\|f_n\right\|_1$. Que peut-on en conclure ?

Exercice E13 :
Soit E un espace vectoriel réel, N_1 et N_2 deux normes sur E et B_1 (resp. B_2) la boule fermée de centre 0_E et de rayon 1 au sens de N_1 (resp. B_2). Montrer que $B_1=B_2$ si, et seulement si, $N_1=N_2$.

Exercice C14 : [Polytechnique]
On pose :

$$E=\left\{f\in\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0)=f'(0)=0\right\}.$$

1. Montrer que $f\mapsto\mathcal{N}_\infty\left(f''+2f'+f\right)_\infty$ est une norme sur E, que l'on notera N.
2. Montrer que N domine $\mathcal{N}_\infty$, et préciser la plus petite constante $a>0$ telle que $\mathcal{N}_\infty\leqslant aN$.
3. Les normes N et $\mathcal{N}_\infty$ sont-elles équivalentes ?