Chapitre 6

Suites et séries de fonctions

Sommaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dans la plupart des exemples, E sera $\mathbb{R}$. Dans tout le chapitre, la lettre A désigne une partie non vide de E. Les lettres I et J désigneront des intervalles de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point.

6.1 Suites de fonctions

6.1.1 Convergence simple

Définition 1

On appelle suite de fonctions de A dans $\mathbb{K}$, toute suite d'éléments de $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.
L'ensemble des suites de fonctions de A dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.

Exemples :

1. Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n \end{cases}$

   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions.

2. Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $g_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \end{cases}$

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 2 (Convergence simple d'une suite de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction. Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.
On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur A si, et seulement si, pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.
On dit que f est la limite simple de (f_n) et on note :

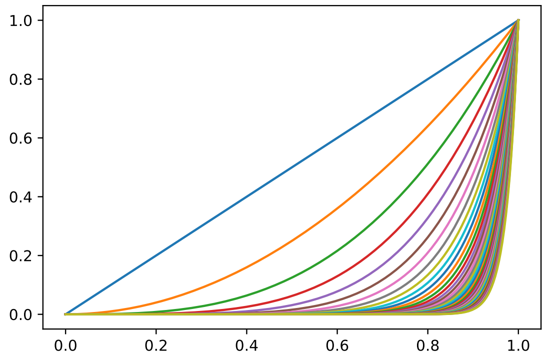
$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVS} f.$$

Remarque : Dire que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur A revient à dire que :

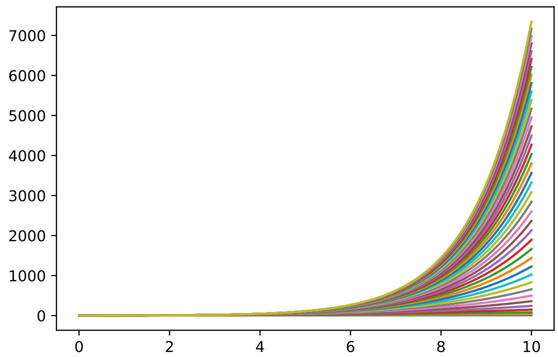
$$\forall x \in A, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_{x,\varepsilon}, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Exemples :

1. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{cases}$



2. La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{cases}$



Proposition 3 (Propriétées conservés par passage à la limite simple)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. On suppose que (f_n) converge simplement vers f sur I.

1. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de fonctions convexes, alors f est convexe.
2. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de fonctions croissantes (respectivement décroissantes) sur I, alors f est croissante (respectivement décroissante) sur I.
3. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de fonctions positives (respectivement négatives) sur I, alors f est positive (respectivement négative) sur I.

Remarque : On remarquera quela continuité n'est pas préservée par passage à la limite simple.
En effet la suite (f_n) est constituée de fonctions continues sur $[0, 1]$ alors que sa limite simple n'est pas continue sur $[0, 1]$.

6.1.2 Convergence uniforme

Définition 4 (Convergence uniforme d'une suite de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction. Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.
On dit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur A si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in A, \quad (n \geqslant N_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon)$$

On dit que f est la limite uniforme de (f_n) et on note :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} f.$$

Remarque : Contrairement à la définition de la convergence simple, en cas de convergence uniforme N_ε est entier qui ne dépend pas de l'élément $x \in A$. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'on utilise la terminologie "uniforme".

Proposition 5

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction. Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$. On a l'implication :

$$\left(f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} f\right) \implies \left(f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVS} f\right)$$

Remarque : On va voir que la réciproque est fausse.

Proposition 6

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction. Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A.
Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur A alors la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Preuve : Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A. Supposons que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur A. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad \forall x \in A, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Comme l'inégalité précédente est valable pour tout $x \in A$, elle l'est aussi pour $x_n \in A$.

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad |f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \varepsilon.$$

On a prouvé que :

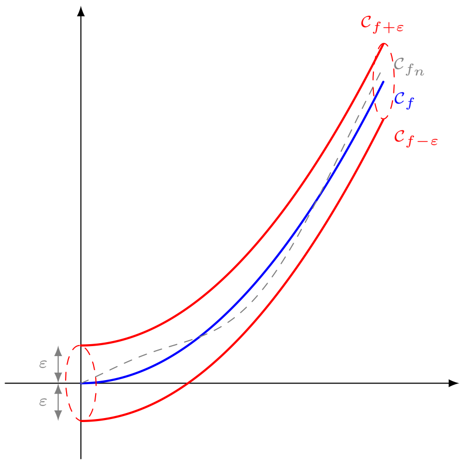
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad |f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \varepsilon.$$

En conclusion :

$$\lim_{n \to +\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0.$$

□

Remarque : On utilise souvent la contraposée de cette proposition pour prouver qu'une convergence n'est pas uniforme.



Interprétations : Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur I, cela revient à dire que quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, les graphes des fonctions f_n sont inclus dans un tube centré autour de f de rayon ε.

6.1.3 Norme de la convergence uniforme

Proposition 7

Notons $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.

Définition 8

L'application :

$$\|\cdot\|_\infty : \begin{cases} \mathcal{B}(A, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+ \\ f \mapsto \sup\limits_{x \in A} |f(x)| \end{cases}$$

est une norme sur $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$. Cette norme est appelé norme infinie ou norme de la convergence uniforme.

Remarque : La norme infinie précédente peut aussi être notée $\|\cdot\|_{\infty, A}$ lorsqu'il est est nécessaire de mentionner l'ensemble A. Nous utiliserons la notation $\|\cdot\|_\infty$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

Preuve :
Soit $f \in \mathcal{B}(A, \mathbf{K})$. Si $f = 0$ alors $\|f\|_\infty = 0$. Réciproquement si $\|f\|_\infty = 0$ alors pour tout x de A,

$$0 \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty = 0$$

On a bien $f = 0$.

Montrons que $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$.

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in A} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in A} |\lambda|.|f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in A} |f(x)| = |\lambda| \|f\|_\infty$$

Montrons l'inégalité triangulaire. On sait que pour tout x de $A, |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ et $|g(x)| \leqslant \|g\|_\infty$. On a donc

$$|(f+g)(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

De ce fait

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in A} |(f+g)(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

□

Théorème 9

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction. Soit $f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} f$
2. $(\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad f_n - f \in \mathcal{B}(A,\mathbb{K}))$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

__Preuve__ : Montrons que (1) $\implies$ (2). Supposons que (f_n) converge uniformément vers f sur A. Par définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in A, \quad (n \geqslant N_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon) \quad (*)$$

Choisissons $\varepsilon = 1$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$,

$$\forall x \in A, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1.$$

Pour tout $n \geqslant N_1$, $f_n - f \in \mathcal{B}(A,\mathbb{K})$. En reprenant $(*)$, on remarque que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad \forall x \in A, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad \|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Réciproquement, montrons que (2) $\implies$ (1). Supposons que $(f_n - f)$ soit bornée à partir d'un certain rang N et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. En revenant à la définition avec les ε.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in [\![N, +\infty[\![, \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad \|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in [\![N, +\infty[\![, \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad \forall x \in A, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Ce qui revient à dire que (f_n) converge uniformément vers f sur A.

□

6.1.4 Méthodes et exemples classiques

Meth 10 (Convergence simple)

On fixe un $x \in A$ comme paramètre et on étudie la convergence de la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ avec x fixé. On sera amené à utiliser :

- des opérations sur les limites, les croissances comparées,
- des développements limités, des équivalents simples,

Il est fréquent d'avoir à étudier des fonctions f_n définies par morceaux sous la forme :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} g_n(x) & \text{si } x \leqslant a_n \\ h_n(x) & \text{si } x > a_n \end{cases}$$

On fixe $x \in A$ et on regarde la position de x par rapport à a_n lorsque n est grand.

Meth 11 (Convergence uniforme)

Après avoir obtenu la limite simple f sur A. Pour prouver que (f_n) converge uniformément vers f sur A.

- Étudier les variations de $f_n - f$ et en déduire $\|f_n - f\|_\infty$.
- Prouver que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
- En déduire que (f_n) converge uniformément vers f sur A.

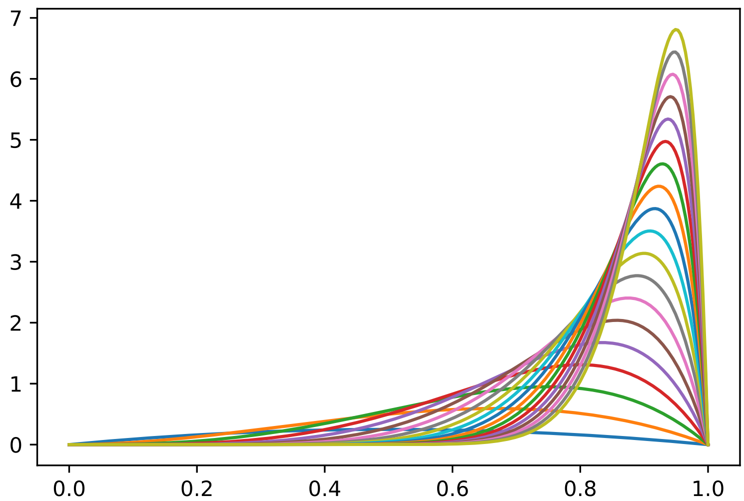
Pour prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme sur A,

- il suffit de trouver une suite (x_n) à valeurs dans A telle que $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ ne tende pas vers 0.
- de mettre en défaut l'une des propriétés conservées par la limite uniforme (limite en un point, continuité, intégrale sur un segment).

Exemple : Étudions la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$f_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto n^\alpha t^n(1-t) \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.



Exercice E1 :
Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions f et g supposées bornées. Montrer que la suite de fonctions $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

Exercice E2 :
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f.

1. Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout n supérieur ou égal à N, on ait pour tout réel x, $|P_n(x) - P_N(x)| \leqslant 1$. Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes $P_n - P_N$ lorsque $n \geqslant N$?
2. Conclure que f est nécessairement une fonction polynomiale.

Exercice E3 :
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f_n(x) = \frac{n}{n+1}x.$$

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Exercice E4 : Existe-t-il une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers exp ?

Exercice E5 :
Soit (P_n) la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par :

- $\mathrm{P}_0(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$;
- $\mathrm{P}_{n+1}(x) = \mathrm{P}_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - \mathrm{P}_n(x)^2\right)$ pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1], 0 \leqslant \mathrm{P}_n(x) \leqslant \sqrt{x}$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,
$$0 \leqslant \sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$
3. En déduire que la suite (P_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercice C6 : [Mines-Ponts]
On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0, f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x)^{1+1/n}}$. Étudier la convergence simple et uniforme de cette suite de fonctions.

6.2 Convergence uniforme et continuité

Théorème 12

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction. Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$. Soit $a \in A$. On suppose que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en a.
2. $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CVU} f$.

Alors la fonction f est continue en a.

Preuve : Montrons que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ en revenant à la définition avec les ε.

Comme $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CVU} f$, la suite de fonctions $(f_n - f)$ est dans $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ à partir d'un certain N et $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N_\varepsilon \geqslant N$,

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad \|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour tout $x \in A$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |\, [f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - f_n(a)] + [f_n(a) - f(a)] \,| \\ &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in A$, pour tout $n \geqslant N$,

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty + |f_n(x) - f_n(a)| + \|f_n - f\|_\infty = 2\,\|f_n - f\|_\infty + |f_n(x) - f_n(a)|$$

En particulier, pour $n = N_\varepsilon$,

$$|f(x) - f(a)| \leqslant 2\frac{\varepsilon}{3} + |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)|$$

Comme la fonction f_{N_ε} est continue en a, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in A \cap [a - \eta_\varepsilon, a + \eta_\varepsilon], \quad |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| \leqslant \varepsilon.$$

En résumé,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in A \cap [a - \eta_\varepsilon, a + \eta_\varepsilon], \quad |f(x) - f(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

En conclusion, la fonction f est continue en a.

$\square$

6.3 Convergence uniforme et limite

Théorème 13 (de la double limite)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction. Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$. Soit $a \in \overline{A}$. On suppose que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet en a une limite finie $\ell_n \in \mathbb{K}$.
2. $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} f$.

Alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie ℓ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. En d'autres termes :

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right) = \ell = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Exercice C7 : [Mines-Télécom]

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose : $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{1 + x^n}$.

1. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur$[0, 1]$.
2. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1[$.
3. Soit $a \in [0, 1[$. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur$[0, a]$.

6.4 Convergence uniforme et dérivation

Une question naturelle est de savoir si la dérivée de la limite d'une suite de fonction est égale à la limite de la suite des dérivées. Plus précisément. Soit $(f_n) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ une suite de fonction qui converge simplement ou uniformément vers f. La fonction f est-elle dérivable sur I et

$$\lim_{n\to+\infty} f_n' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' ?$$

La réponse est négative même lorsque (f_n) converge uniformément sur I. Considérons la suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : x \mapsto \sqrt{x + \frac{1}{n}}$$

Remarquons que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} \sqrt{\cdot}$. En effet pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$|f_n(x) - \sqrt{x}| = \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \leqslant \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\left\|f_n - \sqrt{\cdot}\right\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Or la fonction $\sqrt{\cdot}$ n'est pas dérivable en 0.

Lemme 14

Soit $(\varphi_n) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction continue sur I. Soit $a \in I$ fixé. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Phi_n : x \mapsto \int_a^x \varphi_n(t)dt.$$

On suppose que (φ_n) converge uniformément vers une fonction φ sur tout segment J de I.
Alors la suite de fonctions (Φ_n) converge uniformément sur tout segment J de I vers une fonction Φ définie par :

$$\Phi : x \mapsto \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Preuve : Comme (φ_n) converge uniformément vers une fonction φ sur tout segment J de I et les fonctions φ_n sont toutes continues sur I, on en déduit que φ est continue sur I.
Soit J un segment inclus dans I.
Considérons un segment K inclus dans I qui contient J et le point a.
Remarquons que les fonctions φ_n, φ sont bornées sur K en tant que fonctions continues sur le segment K. La différence $\varphi_n - \varphi$ l'est donc aussi.
D'autre part, la fonction $x \mapsto |x - a|$ est continue sur le segment K, donc bornée sur K. Soit $M_K = \max\limits_{x \in K} |x - a|$.
Pour tout $x \in K$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|\Phi_n(x) - \Phi(x)| &= \left| \int_a^x \varphi_n(t)dt - \int_a^x \varphi(t)dt \right| = \left| \int_a^x (\varphi_n(t) - \varphi(t))dt \right| \\
&\leqslant \int_{\min(a,x)}^{\max(a,x)} |\varphi_n(t) - \varphi(t)|\, dt \leqslant |x - a| \max_{t \in [a,x]} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \\
&\leqslant |x - a| \, \|\varphi_n - \varphi\|_{\infty, K} \leqslant M_K \, \|\varphi_n - \varphi\|_{\infty, K}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\Phi_n - \Phi$ est bornée sur K (et donc sur J) et que :

$$0 \leqslant \|\Phi_n - \Phi\|_{\infty, J} \leqslant \|\Phi_n - \Phi\|_{\infty, K} \leqslant M_K \, \|\varphi_n - \varphi\|_{\infty, K}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{\infty, K} = 0$, le théorème d'encadrement des limites assure que :

$$\lim_{n \to +\infty} \|\Phi_n - \Phi\|_{\infty, J} = 0.$$

En conclusion, la suite de fonctions (Φ_n) converge uniformément sur tout segment J de I vers la fonction Φ.

□

Théorème 15

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. Soit $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. On suppose que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.
2. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur I.
3. La suite de fonctions (f'_n) converge uniformément vers une fonction g sur tout segment J de I.

Alors :

1. La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment J de I.
2. $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$
3. $f' = g$

Preuve : Nous pouvons appliquer le lemme précédent à la suite de fonction $(\varphi_n) = (f'_n)$ et à la fonction $\varphi = g$.
En effet, par hypothèses, la suite de fonctions (f'_n) converge uniformément vers une fonction g sur tout segment J de I.
Soit $a \in I$ fixé.
On sait alors que la suite de fonction (Φ_n) converge uniformément vers Φ sur tout segment J de I où

$$\begin{cases}
\Phi_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f'_n(t)dt = f_n(x) - f_n(a) \\
\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x g(t)dt
\end{cases}$$

Ainsi pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \Phi_n(x) + f_n(a)$.
Or la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur I. Donc $\lim_{n \to +\infty} f_n(a) = f(a)$.

Finalement, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment J de I vers la fonction $x \mapsto f(a) + \Phi(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$. $(\star)$
Par unicité de la limite simple, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$$

La fonction f est dérivable sur I de dérivée égale à g.
Comme g est continue sur I. La fonction f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Pour tout $x \in I$, $f(a) + \int_a^x g(t)dt = f(a) + \int_a^x f'(t)dt = f(x)$.
En reprenant $(\star)$, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment J de I.

□

Théorème 16

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$.
2. Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite de fonctions $(f_n^{(k)})$ converge simplement vers une fonction g_k.
3. La suite de fonctions $(f_n^{(p)})$ converge uniformément vers g_p sur tout segment J de I.

Alors en posant $f = g_0$.

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.
2. $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = g_k$.
3. Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite de fonctions $(f_n^{(k)})$ converge uniformément vers g_k sur tout segment J de I.

6.5 Convergence uniforme et intégration

Théorème 17

Soit $(f_n) \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction. Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$. On suppose que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CVU} f$.
Alors f est continue sur $[a,b]$ et :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Preuve : Comme $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CVU} f$ et que les fonctions f_n sont continues sur $[a,b]$, la fonction f l'est aussi.
Ainsi, les fonctions f_n et f sont bornées sur $[a,b]$ et $f_n - f$ l'est aussi. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt \right| = \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t))dt \right| \leqslant (b-a) \|f_n - f\|_\infty .$$

Or $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Le théorème d'encadrement des limites assure que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt \right| = 0$$

En conclusion :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

□

Exercice E8 :
Soit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1 - nx) \text{ si } x \in [0; 1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$ La suite de fonction (f_n) converge-t-elle uniformément ?

<u>*Exercice C9*</u> *:* [CCINP]

1. Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x\left(1 + n^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}\right)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$vers une fonction f à déterminer.
2. Trouver les α pour lesquels il y a convergence uniforme.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x\left(1+\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x$.

6.6 Séries de fonctions

La lettre n_0 désigne un entier naturel (souvent égal à 0 ou 1).

Définition 18

Soit $(f_n)_{n \geqslant n_0} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On appelle série de fonctions de terme général f_n la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ définie pour tout $n \in [\![n_0, +\infty [\![$:

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f_k.$$

Cette série de fonctions est notée $\sum_{n \geqslant n_0} f_n$ ou $\sum f_n$.

La suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ est appelée somme partielle de la série de fonctions $\sum_{n \geqslant n_0} f_n$.

Remarque : Dans le cas où $n_0 \geqslant 1$, on peut supposer que $n_0 = 0$, quitte à supposer que les fonctions $f_0, \dots, f_{n_0-1}$ sont nulles.

6.6.1 Convergence simple d'une série de fonctions

Nous allons introduire la notion de convergence d'une série de fonctions en se ramenant à l'étude de la suite des sommes partielles.

Définition 19

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur A si, et seulement si, la suite (S_n) converge simplement sur A vers une fonction $S : A \to \mathbb{K}$.

Cette fonction S est appelée somme de la série de fonctions et on la note :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$$

Théorème 20

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur A.
2. Pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente.

Dans ce cas :

$$\forall x \in A, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Preuve : Rappelons que par définition, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur A si, et seulement si, la suite des sommes partielles S_n converge simplement sur A si, et seulement si, pour tout $x \in A$, la suite $(S_n(x))$ est convergente si, et seulement si, pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente.

Comme pour tout $x \in A$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on a pour tout $x \in A$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

□

Définition 21

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum f_n$ est la fonction notée R_n :

$$R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

On notera $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.

Proposition 22

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction S sur A. Alors :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S = S_n + R_n$
2. La suite de fonctions R_n converge simplement vers la fonction nulle $\widetilde{0}$ sur A.

Preuve : Il suffit d'utiliser les propriétés du cours sur le reste d'ordre n d'une série numérique. Pour tout $x \in A$:

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Ainsi pour tout $x \in A$:

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

La suite de fonctions R_n converge simplement vers la fonction nulle $\widetilde{0}$ sur A.

□

6.6.2 Convergence uniforme d'une série de fonctions

Définition 23

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})$.

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A si, et seulement si, la suite (S_n) converge uniformément sur A.

Théorème 24

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A alors la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers $\widetilde{0}$ sur A.

Preuve : Notons S la somme de la série de fonctions $\sum f_n$. Par définition la somme partielle associée (S_n) converge uniformément vers S. Il existe un rang n_0 à partir duquel $S_n - S$ est bornée sur A. Or pour tout $n \geqslant n_0 + 1$,

$$f_n = S_n - S_{n-1} = (S_n - S) + (S - S_{n-1})$$

La fonction f_n est donc bornée dès que $n \geqslant n_0 + 1$. L'inégalité triangulaire donne :

$$0 \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant \|S_n - S\|_\infty + \|S - S_{n-1}\|_\infty$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \left[\|S_n - S\|_\infty + \|S - S_{n-1}\|_\infty\right] = 0$. Le théorème d'encadrement des limites assure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 0.$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers $\widetilde{0}$ sur A. □

Théorème 25

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A.
2. la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur A et R_n le reste d'ordre n converge uniformément vers $\widetilde{0}$ sur A.

Preuve : Raisonnons par équivalences :
La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A si, et seulement si, il existe $S : A \to \mathbb{K}$ tel que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} S$
si, et seulement si, il existe $S : A \to \mathbb{K}$ tel que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVS} S$ et $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} S$
si, et seulement si, il existe $S : A \to \mathbb{K}$ tel que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVS} S$ et $S_n - S \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} \widetilde{0}$
si, et seulement si, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur A et $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} \widetilde{0}$.

□

6.6.3 Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 26 (Convergence normale d'une série de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A si, et seulement si,

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \in \mathcal{B}(A,\mathbb{K})$
2. La série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Remarque : La notion de convergence normale ne concerne que les séries de fonctions (et surtout pas les suites de fonctions).

Théorème 27

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors

1. Pour tout $x \in A$, la série converge $\sum |f_n(x)|$ converge.
2. La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A.

Preuve : Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur A qui converge normalement.

1. Soit $x \in A$, la série $\sum |f_n(x)|$ est une série à termes positifs. De plus, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$$

Comme la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge par hypothèse, le théorème de comparaison par majoration pour les séries à termes positifs, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. On en déduit que la série $\sum f_n(x)$ converge absolument.

2. Pour tout $x \in A$, la série $\sum f_n(x)$ converge absolument, donc converge. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur A.

Pour montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur A, on va regarder son reste d'ordre p. Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p < q$ et pour tout $x \in A$,

$$|f_{p+1}(x) + \cdots + f_q(x)| \leqslant |f_{p+1}(x)| + \cdots + |f_q(x)| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} \|f_k\|_\infty$$

En faisant tendre q vers $+\infty$, on obtient

$$|R_p(x)| \leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$$

Ainsi

$$\|R_p\|_\infty \leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$$

Comme la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, son reste d'ordre p tend vers 0.
On en déduit que (R_p) converge uniformément vers 0.
En conclusion, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A.

□

6.6.4 Reformulation des théorèmes de continuité, d'intégration et de dérivabilité

Théorème 28

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction. Soit $a \in A$. On suppose que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en a.
2. La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A vers $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Alors la fonction S est continue en a.

Preuve : On applique le théorème ?? à la somme partielle (S_n) qui est une suite de fonctions toutes continues en a en tant que somme finie de fonctions continues en a. □

Théorème 29 (de la double limite)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction. Soit $a \in \overline{A}$. On suppose que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet en a une limite finie $\ell_n \in \mathbb{K}$.
2. La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A vers $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Alors la série numérique $\sum \ell_n$ converge vers une limite finie L et $\lim_{x \to a} S(x) = L$.

En d'autres termes :

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = L = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème **? ?** de la double limite à la suite des sommes partielles (S_n). □

Théorème 30

Soit I un intervalle. Soit $(f_n) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment J (inclus dans I) vers S.

Pour tout a de I on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n$ la primitive de f_n qui s'annule en a.

Alors la série $\sum_{n \geqslant 0} F_n$ converge uniformément sur tout segment J de I vers $x \mapsto \int_a^x S$. En particulier,

$$\forall x \in I, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n = \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Théorème 31

Soit $(f_n) \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Alors S est continue sur $[a,b]$ et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt \right) = \int_a^b S(t)dt$$

Exercice C10 : [CCINP] Soit $t \in \mathbb{R}$ et on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + e^{nt}\right)$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que $\lim_{t \to -\infty} f(t) = \ln(2)$.
3. Montrer que $\lim_{t \to 0^-} f(t) = +\infty$.

Exercice C11 : [CCINP]

Soit (λ_n) une suite strictement croissante de réels strictement positifs de limite $+\infty$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_n(x) = (-1)^n e^{-\lambda_n x}$$

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Etudier sa convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. On pose $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$$

<u>Exercice C12</u> : [CCINP]

On considère pour $x > 0$ la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$

1. f est-elle bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. Montrer que

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

3. Montrer que

$$\forall x > 0, 2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$$

4. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
5. Déterminer un équivalent de f en 0^+.
6. Montrer que :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

<u>Exercice C13</u> : [Mines-Télécom]

1. Déterminer l'ensemble de définition de la série de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$. Donner un équivalent simple de f en 0 .
2. Mêmes questions avec $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(nx)}$.

<u>Exercice C14</u> : [CCINP]

On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ pour $x \in [0,1]$.
2. Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
3. En déduire que

$$\int_0^1 \frac{x^2 \ln(x)\mathrm{d}x}{1+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Exercice C15 : [CCINP]

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum u_n$ où $u_n(x) = \exp(-x\sqrt{n})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On note S la somme de cette série de fonctions.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.
4. Montrer que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$.

Théorème 32 (de dérivation termes à termes version $\mathcal{C}^1$)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction. On suppose que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
2. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
3. La série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment J de I vers une fonction T.

Alors

1. La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment J de I vers une fonction S.
2. La fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $S' = T$, ce qui revient à dire :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Corollaire 33 (de dérivation termes à termes version $\mathcal{C}^p$)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction. On suppose que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.
2. Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$. La série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I vers S_k.
3. La série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment J de I vers une fonction S_p.

Alors en posant $S = S_0$.

1. Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment J de I vers une fonction S_k.
2. La fonction S est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $S^{(k)} = S_k$, ce qui revient à dire :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}.$$

Corollaire 34 (de dérivation termes à termes version $\mathcal{C}^\infty$)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonction. On suppose que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
2. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers S.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment J de I vers une fonction S_p.

Alors

1. La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment J de I vers une fonction S.
2. La fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S^{(k)} = S_k$, ce qui revient à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}.$$

<u>*Exercice C16*</u> : [CCINP]

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$

1. Montrer que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$
2. À l'aide du critère spécial des séries alternées, trouver la monotonie de S.
3. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{S}(x+1) + \mathrm{S}(x) = \frac{1}{x}$$
puis en déduire un équivalent simple de $S(x)$ pour x qui tend vers 0 .

<u>*Exercice C17*</u> : [Centrale MP]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : x \mapsto x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. On note g la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. On pose $f : x \mapsto g(x) - \ln(x)$. Montrer que f vérifie les trois conditions suivantes :
   (i) $f(1) = 0$.
   (ii) f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$;
   (iii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) - f(x) = \ln(x)$;
   Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
4. Réciproquement, soit f vérifiant les trois conditions de la question précédente. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} x \ln(n) + \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k)$$

<u>*Exercice C18*</u> : [Mines-Ponts]

On pose $f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+x}}\right) - 2\sqrt{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 1} f_{n+1}-f_n$.
2. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Calculer $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice E19 :
Pour $x\in\mathbb{R}_+$on pose $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. Montrer que la fonction S est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que S n'est pas dérivable en 0 . On pourra commencer par montrer que $S(x)/x$ possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers 0.

Exercice E20 : On pose :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathsf{Arctan}(nx)}{n^2}.$$

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$
2. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. Déterminer un équivalent de f au voisinage de 0.

Exercice E21 :
La fonction ζ de Riemann est la fonction :

$$\zeta : x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$$

1. Donner l'ensemble de définition D de ζ.
2. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.
3. Étudier le monotonie et la convexité de ζ sur D.
4. Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)$ et un équivalent simple de ζ en $+\infty$.
5. Déterminer $\lim_{x\to 1^+}\zeta(x)$ et un équivalent simple de ζ en 1^+.
6. En déduire le tableau de variations de ζ et l'allure de la courbe de ζ.

Exercice E22 : On reprend les notations précédentes.

1. Prouver que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.
2. On se propose de donner une autre méthode pour obtenir l'équivalent :

$$\zeta(x)\underset{x\to 1^+}{\sim}\frac{1}{x-1}.$$

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et on pose : $\eta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

(a) Montrer que η est continue sur $]0,+\infty[$.

(b) Établir que pour tout $x\in]1,+\infty[$,

$$\zeta(x)-\eta(x)=2^{1-x}\zeta(x)$$

(c) Rappeler la valeur de $\eta(1)$. En déduire que $\zeta(x)\underset{x\to 1^+}{\sim}\frac{1}{x-1}$.

6.7 Approximations uniformes

6.7.1 Par des fonctions en escaliers

Théorème 35

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier φ telle que $\|f - \varphi\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \varepsilon$
2. Il existe une suite de fonctions en escalier (φ_n) telle que $\varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CVU} f$.

6.7.2 Par des fonctions polynomiales

Théorème 36 (de Weierstrass)

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale P telle que $\|f - P\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \varepsilon$.
2. Il existe une suite de fonctions polynomiales (P_n) telle que $P_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CVU} f$.

Exercice E23 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f(t)t^k \, \mathrm{d}t = 0$. Que peut-on dire de f?

Exercice E24 : [Lemme de Riemann-Lebesgue]
On considère un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et un espace vectoriel normé de dimension finie E.

1. Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} \varphi(t) \mathrm{d}t = 0$$

2. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) \mathrm{d}t = 0$$

3. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t) \mathrm{d}t = 0$$