Chapitre 7

Topologie dans les espaces vectoriels normés

Sommaire

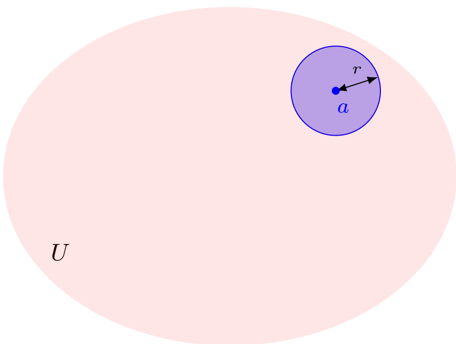
7.1 Ouverts

Définition 1 (Ouvert)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit U une partie de E.
On dit que U est un ouvert de E si, et seulement si, pour tout $a \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$.

Remarques :

1. Le rayon r dépend de l'élément a.
2. Intuitivement, tout point proche d'un point a de U reste dans U.
3. On dit aussi parfois que la partie U est ouverte ou une partie ouverte de E.



Proposition 2

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in E$ et $r > 0$.
La boule ouverte $B(a, r)$ porte bien son nom, car c'est un ouvert de E.

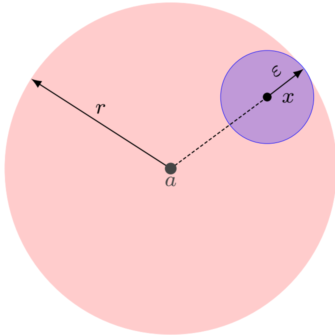
Preuve : Soit $x \in B(a,r)$. Par définition $d(x,a) < r$. Choisissons$\varepsilon = r - d(x,a) > 0$.
Montrons que $B(x,\varepsilon) \subset B(a,r)$. Soit $y \in B(x,\varepsilon)$. L'inégalité triangulaire donne :

$$\|y-a\| = \|(y-x)+(x-a)\| \leqslant \|y-x\| + \|x-a\| < \varepsilon + d(x,a) = r.$$

Donc $y \in B(x,a)$. Ainsi $B(x,\varepsilon) \subset B(a,r)$.
On a prouvé que :

$$\forall x \in B(a,r), \quad \exists \varepsilon > 0, \quad B(x,\varepsilon) \subset B(a,r).$$

La boule ouverte $B(a,r)$ est bienouverte.



□

Théorème 3

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On note $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts de E.

1. Les ensembles $\varnothing$ et E sont dans $\mathcal{O}$.
2. L'ensemble $\mathcal{O}$ est stable par intersection finie. En d'autres termes, une intersection FÌNIE d'ouverts reste un ouvert. ("IFO" s'en souvenir).
3. L'ensemble $\mathcal{O}$ est stable par union quelconque. En d'autres termes, une union quelconque d'ouverts reste un ouvert.

Remarques :

1. On dit que $(E, \mathcal{O})$ est un espace topologique.
2. Une intersection quelconque d'ouverts peut ne pas être ouvert. En effet dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$$

Preuve :

1. On a déjà vu que E et $\varnothing$ sont des ouverts de E.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $U_1, \dots, U_n$ des ouverts de E. Montrons que $\bigcap_{k=1}^{n} U_k$ est encore un ouvert de E.

   Soit $x \in \bigcap_{k=1}^{n} U_k$. Par définition, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x \in U_k$.
   Par conséquent, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe $r_k > 0$ tel que $B(x,r_k) \subset U_k$.
   Posons $r = \min_{k\in[\![1,n]\!]} r_k$.
   On remarque que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $B(x,r) \subset U_k$.
   Donc $B(x,r) \subset \bigcap_{k=1}^{n} U_k$.
   En conclusion, $\bigcap_{k=1}^{n} U_k$ est un ouvert de E.
3. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts. Justifions que $\bigcup_{i\in I} U_i$ est encore un ouvert de E.

   Soit $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$. Par définition, il existe $j \in I$, $x \in U_j$.
   Comme U_j est un ouvert de E. Il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U_j$.
   Ainsi $B(x,r) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.
   En conclusion, $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert de E.

□

Proposition 4

Soit $(E_1, N_1), \dots, (E_n, N_n)$ des espaces vectoriels normés.
On considère l'espace vectoriel normé produit $(E_1 \times \cdots \times E_n, N)$ où N est la norme produit.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on considère un ouvert U_i de E_i.
L'ensemble produit $X = U_1 \times \cdots \times U_n$ est un ouvert de $(E_1 \times \cdots \times E_n, N)$.

Preuve : Rappelons la norme produit sur $E_1 \times \cdots \times E_n$:

$$N : \begin{cases} E_1 \times \cdots \times E_n \to \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} N_k(x_k) \end{cases}$$

On notera pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, B_i les boules ouvertes dans (E_i, N_i) et on notera B_N les boules ouvertes de (E, N).

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in U_i$. Comme U_i est un ouvert de E_i.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\delta_i > 0$ tel que $B_i(x_i, \delta_i) \subset U_i$.
Posons $\delta = \min\limits_{i \in [\![1,n]\!]} \delta_i$.
Montrons que $B_N(x, \delta) \subset X$.
Soit $y = (y_1, \dots, y_n) \in B_N(x, \delta)$. Par définition :

$$N(y - x) < \delta$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad N_i(y_i - x_i) \leqslant N(y - x) < \delta \leqslant \delta_i$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad y_i \in B_i(x_i, \delta_i)$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad y_i \in U_i$$

On en déduit que $y \in X$. En conclusion, l'ensemble X est un ouvert de $(E_1 \times \cdots \times E_n, N)$.

□

Exercice A1 :
Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace vectoriel normé. L'intervalle ouvert $]a, b[$ est-il un ouvert de $\mathbb{R}$?
2. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est un espace vectoriel normé. L'intervalle ouvert $]a, b[$ est-il un ouvert de $\mathbb{C}$?

Exercice A2 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que toute partie ouverte non vide de E peut s'écrire comme une réunion de boules ouvertes.

Exercice E3 : Soient E un espace vectoriel normé, Ω un ouvert de E.

1. Montrer que, pour tout $a \in E$, la partie $\{a\} + \Omega = \{a + x \mid x \in \Omega\}$ est un ouvert de E.
2. Soit A une partie non vide de E. En déduire que, la partie $A + \Omega = \{a + x \mid (a, x) \in A \times \Omega\}$ est un ouvert de E.

7.2 Voisinages

Définition 5 (Voisinages)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in E$.
On dit qu'une partie X de E est un voisinage de a si, et seulement si, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset X$.

Remarques :

1. Ceci revient à dire que X est un voisinage de a si, et seulement si, X contient un ouvert contenant a.
2. Un ouvert est une partie de E qui est voisinage de tous ses points.
3. Pour $E = \mathbb{R}$, on peut définir par extension les voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.
   (a) On appelle voisinage de $+\infty$ tout ensemble contenant un intervalle de la forme $[A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$.
   (b) On appelle voisinage de $-\infty$ tout ensemble contenant un intervalle de la forme $]-\infty, B]$ où $B \in \mathbb{R}$.

Proposition 6

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in E$.

1. Une intersection FINIE de voisinages de a est encore un voisinage de a.
2. Une union quelconque de voisinages de a est un voisinage de a.

Définition 7

Soit $\mathcal{P}$ une propriété mathématique. On dit que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie au voisinage de a si, et seulement si, il existe un voisinage de a sur lequel $\mathcal{P}$ est vraie.

Exemples :

1. La fonction $x \mapsto x\sqrt{1 + \cos(x)}$ est positive au voisinage de $+\infty$.
2. La fonction $(x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2)\sin(z)$ est bornée au voisinage de $(0, 0, 1)$.

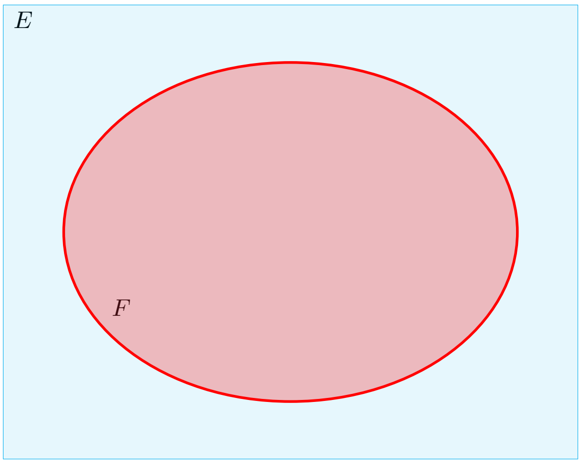
Théorème 8 (Invariance des voisinages par des normes équivalentes)

Soit E un espace vectoriel. Soit N_1 et N_2 deux normes sur E. Notons respectivement $\mathcal{V}_1(a)$ et $\mathcal{V}_2(a)$ l'ensemble des voisinages de a pour la norme N_1 et N_2.
Si les normes N_1 et N_2 sont équivalentes, alors $\mathcal{V}_1(a) = \mathcal{V}_2(a)$.

7.3 Fermés

Définition 9 (Fermé)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit F une partie de E. On dit que F est un fermé de E si, et seulement si, le complémentaire $\complement_E F$ de F dans E est un ouvert de E.



Remarques :

1. On verra une caractérisation pratique avec les suites utiles en exercices.
2. La notion d'ensemble fermé n'est pas la négation de la notion d'ouvert. Une partie peut être ouverte et fermée à la fois comme E. Il existe des ensembles qui sont ni ouverts et ni fermés comme $[0,1[$.
3. On dit aussi parfois que la partie F est fermée ou une partie fermée de E.

Exemples :

1. Les parties $\varnothing$ et E sont fermées.
2. Dans $E = \mathbf{R}$, un intervalle fermé $X = [a,b]$ est fermé. En effet son complémentaire $\complement_E X =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ est ouvert.

Proposition 10

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit X une partie de E.

1. La partie X est ouverte si, et seulement si, $\complement_E X$ est fermé.
2. Soit $(F_1, \dots, F_n)$ une famille FINIE de fermés. L'union $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ est fermé.
3. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de fermés. L'intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé.

Preuve :

1. Raisonnons par équivalences.
   L'ensemble $\complement_E X$ est fermé si, et seulement si, $\complement_E(\complement_E X)$ est ouvert si, et seulement si, X est ouvert.
2. D'après les règles de Morgan,
$$\complement_E\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} (\complement_E F_k)$$
   Comme pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, F_k est fermé, $\complement_E F_k$ est ouvert.
   En tant qu'intersection finie d'ouverts, $\complement_E\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)$ est aussi ouvert.
   Par définition, $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ est fermé.
3. En utilisant à nouveau les règles de Morgan,
$$\complement_E\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) = \bigcup_{i \in I} (\complement_E F_i)$$
   Comme pour tout $i \in I$, F_i est fermé,$\complement_E F_i$ est ouvert.
   En tant qu'union quelconque d'ouverts, $\complement_E\left(\bigcup_{i \in I} F_i\right)$ est aussi ouvert.
   En conclusion, l'intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé.

□

Proposition 11

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in E$ et $r \geqslant 0$.

1. La boule fermée $\overline{B}(a,r)$ porte bien son nom, car c'est un fermé de E.
2. La sphère $S(a,r)$ de centre a et de rayon r est un fermé de E.

<u>*Preuve*</u> :

1. Montrons que $X = \complement_E \overline{B}(a,r)$ est un ouvert. Par définition :

$$X = \{x \in E \mid d(x,a) > r\}$$

Soit $z \in X$. Ainsi $d(z,a) > r$. Posons $\varepsilon = d(z,a) - r > 0$.
Vérifions que $B(z,\varepsilon) \subset X$.
Soit $y \in B(z,\varepsilon)$. Remarquons que :

$$\|y-a\| = \|y-z+z-a\| \geqslant \|z-a\| - \|y-z\| > d(z,a) - \varepsilon = r$$

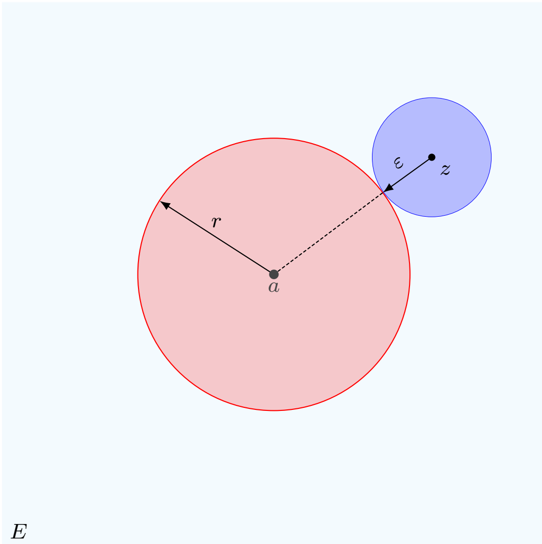
Ainsi $y \in X$. On a prouvé l'inclusion $B(z,\varepsilon) \subset X$.
Finalement, l'ensemble X est ouvert, donc $\overline{B}(a,r)$ est fermé.

2. Remarquons que la sphère

$$S(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| = r\} = \overline{B}(a,r) \cap \complement_E B(a,r)$$

La sphère $S(a,r)$ est fermé en tant qu'intersection de deux fermés.

□



<u>*Exemples*</u> :

1. Soit $a \in E$. Tout singleton $\{a\}$ est un fermé puisque c'est une boule fermée de centre a et rayon 0.
2. Tout ensemble fini $F = \{x_1, \ldots, x_p\} = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} \{x_k\}$ d'éléments de E est un fermé de E en tant qu'union finie de singletons.|

Proposition 12

Soit $(E_1, N_1), \ldots, (E_n, N_n)$ des espaces vectoriels normés.
On considère l'espace vectoriel normé produit $(E_1 \times \cdots \times E_n, N)$ où N est la norme produit.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on considère un fermé F_i de E_i.
L'ensemble produit $Y = F_1 \times \cdots \times F_n$ est un fermé de $(E_1 \times \cdots \times E_n, N)$.
On dit qu'un produit fini de fermés est fermé.

<u>*Preuve*</u> :
Montrons que $U = \complement_E Y$ est un ouvert. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$,

$$\begin{aligned} x \in \complement_E Y &\iff x \notin Y \\ &\iff \text{non } (\forall i \in [\![1,n]\!], \quad x_i \in F_i) \\ &\iff \exists i \in [\![1,n]\!], \quad x_i \notin F_i \end{aligned}$$

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on note $U_i = \complement_{E_i} F_i$ et on pose $Z_i = E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times U_i \times \cdots \times E_n$.
L'ensemble Z_i est l'ensemble des éléments $(x_1, \ldots, x_n) \in E$ tel que $x_i \in U_i$ c'est-à-dire, $x_i \notin F_i$.
On a donc

$$\complement_E Y = \bigcup_{i=1}^{n} Z_i$$

Comme, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, Z_i est un ouvert comme produit d'un nombre fini d'ouverts, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ est ouvert comme union finie d'ouverts et donc Y est un fermé.

$\square$

Exercice A4 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Soit F une partie fermée de E, et x un point de E n'appartenant pas à F. Montrer que la distance de x à F est strictement positive.

Exercice A5 : Soit F un fermé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$O_n = \bigcup_{a \in F} B(a, 1/n)$$

1. Justifier que (O_n) est une suite d'ouverts décroissante pour l'inclusion.
2. Montrer que :
$$F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B(a, 1/n)$$

On a prouvé que tout fermé peut s'écrire comme intersection d'une suite décroissante d'ouverts.

7.4 Intérieur et point intérieur

Définition 13 (Point intérieur)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E. Soit $a \in A$.
On dit que a est un point intérieur à A si, et seulement si,il existe $r > 0$, $B(a, r) \subset A$.

Remarques :

1. Le point a est intérieur à A si, et seulement si, A est un voisinage de a.
2. Soit U un ouvert de E, tous les points de U sont des points intérieurs à U.

Exemple : Soit $A = [0, 1[$. Les points a de$]0, 1[$ sont à l'intérieur de A. Par contre 0 n'est pas à l'intérieur de A.

Définition 14

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.
L'ensemble des points intérieurs à A est appelé intérieur de A. On le note $\mathring{A}$ ou $\mathsf{Int}(A)$.

Exemple : Soit $a \in E$ et $r > 0$. Alors $\mathsf{Int}(\overline{B}(a, r)) = B(a, r)$.

Théorème 15

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.

1. L'ensemble $\mathring{A}$ est le plus grand (au sens de l'inclusion) ouvert de E contenu dans A.
2. L'ensemble A est ouvert si, et seulement si, $A = \mathring{A}$.

Preuve :

1. Remarquons que par définition $\mathring{A} \subset A$.
   Montrons que $\mathring{A}$ est un ouvert de E. Soit $x \in \mathring{A}$. Par définition, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.
   Montrons que $B(x, \frac{r}{2}) \subset \mathring{A}$. Soit $y \in B(x, \frac{r}{2})$. Montrons que $B(y, \frac{r}{2}) \subset A$.
   Pour tout $z \in B(y, \frac{r}{2})$
   $$\|z - x\| \leqslant \|z - y\| + \|y - x\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$
   Ainsi $z \in B(x, r)$. Donc $z \in A$.
   On a prouvé que pour $x \in \mathring{A}$, il existe $\frac{r}{2} > 0$ tel que $B(x, \frac{r}{2}) \subset \mathring{A}$.
   Par conséquent, $\mathring{A}$ est un ouvert de E.

   Soit U un ouvert contenu dans A. Montrons que $U \subset \mathring{A}$. Soit $x \in U$. Par définition, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.
   Or $U \subset A$. Ainsi $B(x, r) \subset A$. On en déduit que $x \in \mathring{A}$.
   En conclusion, $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de E contenu dans A.
2. Si A est ouvert alors pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. Donc $a \in \mathring{A}$. Or l'inclusion réciproque $\mathring{A} \subset A$ est toujours vraie. Donc $A = \mathring{A}$.
   Réciproquement, supposons que $A = \mathring{A}$. Rappelons que $\mathring{A}$ est un ouvert de E. Ainsi A est un ouvert de E.

$\square$

Exercice E6 :
Soit (E, N) un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

1. On suppose qu'il existe a dans F et $r > 0$ tels que $B(a, r)$ soit contenue dans F. Montrer que $F = E$.
2. Que peut-on dire de l'intérieur d'un sous-espace vectoriel de E ?

7.5 Adhérence et point adhérent

Définition 16

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E. Soit $a \in A$.

1. On dit que a est un point adhérent à A si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad A \cap B(a, \varepsilon) \neq \varnothing$$

2. L'adhérence de A est l'ensemble des points adhérents à A. On note cet ensemble $\overline{A}$.

Remarque :

1. On a toujours l'inclusion $A \subset \overline{A}$. En effet, soit $a \in A$, pour tout $\varepsilon > 0$,$A \cap B(a, \varepsilon)$ est non vide car cette intersection contient a.
2. On retrouvera un peu plus loin la définition donnée dans le chapitre des espaces vectoriels normés.

Exemples :

1. Soit $A =]0, 1[$. L'adhérence de A est $[0, 1]$.
2. Soit $a \in E$ et $r > 0$. L'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$ est la boule fermé $\overline{B}(a, r)$.

Proposition 17 (Liens entre intérieur et adhérence)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E. On a les égalités suivantes :

$$\complement_E \mathring{A} = \overline{\complement_E A} \quad \text{et} \quad \complement_E \overline{A} = \widehat{\complement_E A}^{\circ}$$

Preuve : Soit $a \in E$. Raisonnons par équivalences :

$$\begin{aligned} a \in \complement_E \mathring{A} & \iff a \notin \mathring{A} \\ & \iff \forall r > 0, \quad B(a, r) \not\subset A \\ & \iff \forall r > 0, \quad B(a, r) \cap \complement_E A \neq \varnothing \\ & \iff a \in \overline{\complement_E A} \end{aligned}$$

Par conséquent : $\complement_E \mathring{A} = \overline{\complement_E A}$.

Appliquons l'égalité à $\complement_E A$. On obtient :

$$\complement_E \widehat{\complement_E A}^{\circ} = \overline{\complement_E (\complement_E A)} = \overline{A}$$

En prenant le complémentaire, on obtient :

$$\widehat{\complement_E A}^{\circ} = \complement_E \overline{A}.$$

□

Théorème 18

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.

1. L'adhérence $\overline{A}$ de l'ensemble A est le plus petit fermé au sens de l'inclusion contenant A.
2. L'ensemble A est fermée si, et seulement si, $A = \overline{A}$.

Preuve :

1. Montrons que $\overline{A}$ est une partie fermée de E. D'après la proposition précédente, $\complement_E \overline{A} = \widehat{\complement_E A}^{\circ}$.
Or ce dernier ensemble est un ouvert de E. Par définition, $\overline{A}$ est bien un fermé de E.
Soit F un fermé contenant A. Montrons que $\overline{A} \subset F$.

   On sait que $\complement_E F$ est un ouvert de E. D'autre part, $\complement_E A \subset \complement_E F$. Or $\overset{\circ}{\widehat{\complement_E A}}$ est le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) contenant $\complement_E A$.

   Par conséquent : $\complement_E F \subset \overset{\circ}{\widehat{\complement_E A}} = \complement_E \overline{A}$.
En reprenant le complémentaire, $\overline{A} \subset F$.
On a prouvé que $\overline{A}$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé contenant A.
2. Supposons que A est un fermé de E. On sait que déjà $A \subset \overline{A}$. Montrons que l'inclusion réciproque. Comme $\overline{A}$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé contenant A et que A est un fermé (contenant A), alors $\overline{A} \subset A$.
Par double inclusion, $A = \overline{A}$.

   Réciproquement, si $A = \overline{A}$. On sait que $\overline{A}$ est un fermé de E.
Ainsi A est aussi fermé dans E.

□

Théorème 19 (Caractérisation séquentielle des points adhérents et des fermés)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E. Soit $x \in E$.

1. Le point x est adhérent à A si, et seulement si, il existe une suite (a_n) d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = x$.
2. L'ensemble A est fermé si, et seulement si, pour toute suite (a_n) convergente d'éléments de A, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \in A$.

Preuve :

1. Supposons que $x \in \overline{A}$. Par définition,
$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2^n}$. Ainsi $B(x, \frac{1}{2^n}) \cap A \neq \varnothing$.
Il existe $a_n \in A$ tel que $\|a_n - x\| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$. Le théorème d'encadrement des limites assure que :
$$\lim_{n \to +\infty} \|a_n - x\| = 0 \text{ ce qui revient à } \lim_{n \to +\infty} a_n = x.$$

   Soit $x \in E$. Réciproquement, supposons qu'il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = x$. Montrons que $x \in \overline{A}$.
Traduisons la convergence de la suite (a_n) vers a. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$,
$$\forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad \|a_n - x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$
En particulier, $a_{N_\varepsilon} B(x, \varepsilon)$. Comme $a_{N_\varepsilon} \in A$. On en déduit que : $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.
Finalement, on a prouvé que :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing.$$
Ainsi $x \in \overline{A}$.
2. Supposons que A soit fermé. Ainsi $A = \overline{A}$. Soit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = x$ avec $x \in E$.
D'après le point précédent, x est limite d'une suite à valeurs dans A. Donc x est un point adhérent à A. Donc $x \in \overline{A}$. Or $A = \overline{A}$. Donc $x \in A$.

   Réciproquement, supposons que pour toute suite (a_n) convergente d'éléments de A, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \in A$. Montrons que $A = \overline{A}$. On sait déjà que $A \subset \overline{A}$. Soit $x \in \overline{A}$. D'après le point précédent, il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = x$. Donc $x \in A$ par hypothèse.
Ainsi $\overline{A} \subset A$. Par double inclusion, $A = \overline{A}$.
L'ensemble A est bien fermé.

□

Exercice E7 : Soit A une partie convexe non vide d'un espace vectoriel normé E.
Montrer que l'adhérence de A est convexe.

Exercice E8 : Soit A une partie convexe non vide d'un espace vectoriel normé E.

Montrer que l'intérieur de A est convexe.

Exercice A9 :
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Établir

$$\mathrm{Vect}(\bar{A}) \subset \overline{\mathrm{Vect}\, A}$$

Exercice E10 :
Soit A une partie non vide d'un espace normé E et x un vecteur de E.

1. Justifier que l'on peut introduire
$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\| \in \mathbb{R}_+.$$
2. Montrer l'équivalence
$$x \in \bar{A} \Longleftrightarrow d(x, A) = 0.$$

Exercice E11 : Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel normé (E, N).

1. On suppose $A \subset B$. Établir $A^\circ \subset B^\circ$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.
2. Comparer $(A \cap B)^\circ$ et $A^\circ \cap B^\circ$ d'une part puis $(A \cup B)^\circ$ et $A^\circ \cup B^\circ$ d'autre part.
3. Comparer $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$ d'une part puis $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$ d'autre part.

Exercice E12 : Soit $f : \mathbb{R} \to F$ continue bornée et A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Montrer

$$\|f\|_{\infty, A} = \|f\|_{\infty, \bar{A}}$$

Exercice E13 : On munit l'espace des suites bornées réelles $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ de la norme $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} (|u_n|)$.

1. Montrer que l'ensemble des suites convergentes est un fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que l'ensemble des suites (a_n) qui sont terme général d'une série absolument convergente n'est pas un fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. On pourra utiliser la suite de suites :
$$(u_p(n))_{n \in \mathbb{N}} = \frac{1}{(p+1)^{1+1/n}}$$

Définition 20 (Frontière)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.
On appelle frontière de A l'ensemble noté ∂A ou $Fr(A)$ défini par :

$$\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}.$$

Remarque : La frontière de A est fermé dans E en tant qu'intersection de deux fermés.

$$\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A} = \overline{A} \cap \complement \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{\complement_E A}.$$

Exercice E14 :
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. Sot $x \in E \backslash A$ et $a \in A$.
Montrer que si $d(x, A) = \|x - a\|$ alors a appartient à la frontière de A.

Exercice E15 :
Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel normé E. Établir $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(F)) = \mathrm{Fr}(F)$.

Exercice E16 :
Soit A une partie d'un espace normé E.

1. Montrer que $\mathrm{Fr}\left(\complement_E A\right) = \mathrm{Fr}\, A$.
2. Montrer que la partie A est fermée si, et seulement si, $\mathrm{Fr}\, A \subset A$.
3. Montrer que la partie A est ouverte si, et seulement si, $A \cap \mathrm{Fr}\, A = \varnothing$

Définition 21

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.
L'ensemble A est dense dans E si, et seulement si, $\overline{A} = E$.
Ce qui revient à dire que tous points de E sont adhérent à X.

Théorème 22

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'ensemble A est dense dans E.
2. Pour tout $x \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \varnothing$.
3. Pour tout $x \in E$, il existe une suite (a_n) d'éléments de A tels que :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = x$$

Preuve : Montrons que (1) $\iff$ (2) en raisonnant par équivalence

$$\begin{aligned} \overline{A} = E &\iff E \subset \overline{A} \\ &\iff \forall x \in E, \quad x \in \overline{A} \\ &\iff \forall x \in E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \end{aligned}$$

Montrons que (1) $\iff$ (3) en raisonnant par équivalence :

$$\begin{aligned} \overline{A} = E &\iff E \subset \overline{A} \\ &\iff \forall x \in E, \quad x \in \overline{A} \\ &\iff \forall x \in E, \quad \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = x. \end{aligned}$$

□

Exercice E17 :
Soit (E, N) un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\bar{F}$ (l'adhérence de F) est aussi un sous-espace vectoriel de E.
2. En déduire qu'un hyperplan est soit fermé, soit dense.
3. Dans cette question, on suppose E de dimension finie. Montrer qu'un hyperplan de E est fermé.

Exercice E18 : Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra considérer, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices de la forme $A - \lambda I_n$.

Exercice E19 : Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

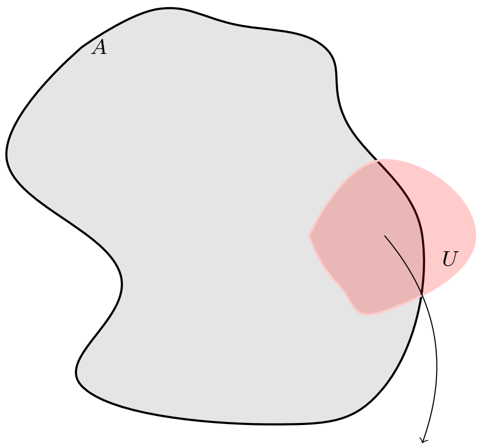
Exercice E20 : Soit U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E.

1. Établir que $U \cap V$ est encore un ouvert dense de E.
2. En déduire que la réunion de deux fermés d'intérieurs vides est aussi d'intérieur vide.

7.6 Topologie induite

Définition 23 (Ouvert relatif)

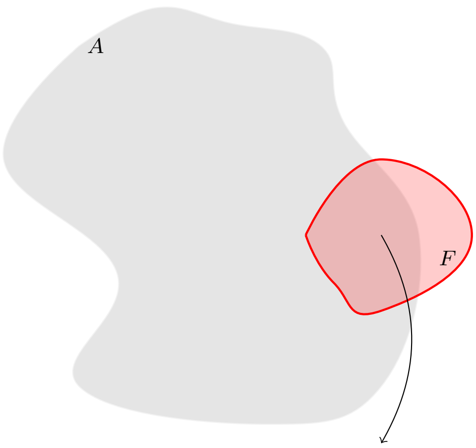
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.
Un ouvert relatif de A est un ensemble de la forme $U \cap A$ où U est un ouvert de E.



$U \cap A$ est un ouvert de A

Exemples : Un ouvert relatif de A peut ne pas être un ouvert de E. En revanche, si A est lui-même un ouvert alors tout ouvert de A est aussi un ouvert de E en tant qu'intersection de deux ouverts de E.

1. L'intervalle $[0, 1[$ est un ouvert relatif de $[0, +\infty[$ puisque $[0, 1[=]-1, 1[\cap [0, +\infty[$.
2. Les ensembles $\varnothing$ et A sont des ouverts relatifs de A.



$F \cap A$ est un fermé de A

Définition 24 (Fermé relatif)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.
Un fermé relatif de A est un ensemble de la forme $F \cap A$ où F est un fermé de E.

Exemples : Un fermé de A peut ne pas être un fermé de E. En revanche, si A est lui-même un fermé alors tout fermé de A est aussi un fermé de E en tant qu'intersection de deux fermés de E.

1. L'intervalle $]0, 1]$ est un fermé relatif de $]0, +\infty[$ car $]0, 1] = [-1, 1] \cap]0, +\infty[$.
2. Les ensembles $\varnothing$ et A sont des fermés relatifs de A.

Théorème 25

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A et X des parties de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est un fermé relatif à A.
2. $\complement_A X$ est un ouvert relatif à A.

Preuve : Supposons que X est un fermé relatif à A. Il existe un fermé F de E tel que $X = F \cap A$. Précisons :

$$\complement_A X = A \cap \complement_E X = A \cap \complement_E (F \cap A) = A \cap (\complement_E F \cup \complement_E A)) = (A \cap \complement_E F) \cup (A \cap \complement_E A) = A \cap \complement_E F.$$

Or $\complement_E F$ est un ouvert de E. Par définition $\complement_A X$ est un ouvert relatif à A.

□

Proposition 26 (Caractérisation séquentielle des fermés relatifs)

Soit X une partie de A.
L'ensemble X est un fermé relatif de A si, et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de X qui converge $\boxed{\text{dans } A}$ a sa limite dans X.

Preuve :
Supposons que X soit un fermé relatif de A. Alors, il existe un fermé F de E tel que $X = A \cap F$.
Soit (x_n) est une suite d'éléments de X qui converge vers $\ell \in A$, alors, comme pour tout $n \in \mathbb{N} \quad x_n \in F$, le caractère fermé de F assure que $\ell \in F$. Par suite, on a $\ell \in A \cap F = X$.
Réciproquement, supposons que pour toute suite (x_n) d'éléments de X qui converge $\boxed{\text{dans } A}$ a sa limite dans X.
Montrons que $X = A \cap \overline{X}$.
L'inclusion $X \subset A \cap \overline{X}$ est vraie car $X \subset A$ et $X \subset \overline{X}$.
Prouvons l'inclusion réciproque. Soit $\ell \in A \cap \overline{X}$, et montrons que $\ell \in X$. Comme $\ell \in \overline{X}$, il existe une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ convergeant vers ℓ.
Comme $\ell \in A$, l'hypothèse de départ nous assure que $\ell \in X$. On a prouvé $A \cap \overline{X} \subset X$.
Par double inclusion,
$$X = A \cap \overline{X}$$
Or $\overline{X}$ est un fermé de E, on en déduit que X est un fermé relatif de A.

□

Définition 27 (Voisinage relatif)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.
Soit a un point de A. Une partie V de A est un voisinage relatif de A du point a si, et seulement si, il existe un voisinage $\widetilde{V}$ de a dans E tel que $V = \widetilde{V} \cap A$.

Théorème 28 (Invariance par changement de normes équivalentes)

Soit $\| \cdot \|$ et N deux normes équivalentes sur E et X une partie de E.

1. La partie X est ouverte pour $\| \cdot \|$ si, et seulement si, elle est ouverte pour N.
2. La partie X est fermée pour $\| \cdot \|$ si, et seulement si, elle est fermée pour N.
3. L'adhérence (respectivement l'intérieur) de X pour $\| \cdot \|$ est l'adhérence (respectivement l'intérieur) pour N.
4. La partie X est dense pour $\| \cdot \|$ si, et seulement si, elle est dense pour N.