Chapitre 10

Théorèmes de Lebesgue et intégrales à paramètres

Sommaire

10.1 Théorèmes de Lebesgue

10.1.1 Rappels

Théorème 1

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a,b]$.
On suppose que (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f sur $[a,b]$. Alors f est continue sur $[a,b]$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n.$$

Remarque : On ne peut appliquer ce théorème que dans le cas d'un segment.

Exercice A1 : Rappeler rapidement la preuve du théorème précédent.

10.1.2 Théorème de convergence dominée

Théorème 2 (Théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose que :

1. Les fonctions (f_n) sont continues par morceaux sur I
2. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.
3. Hypothèse de domination : Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leqslant \varphi$$

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f.$$

Remarques :

1. Dans l'hypothèse de domination, la fonction φ ne doit pas dépendre de l'entier n.
2. L'hypothèse de domination permet d'en déduire que les f_n et f sont bien intégrables sur I.
3. Le programme officiel stipule qu'il n'est pas nécessaire de mentionner les hypothèses de continuité par morceaux.

Exemple : Considérons pour ton $n \in \mathbb{N}$, la suite : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.
Calculons : $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \sin^n(x)$.

1. (Les fonctions f_n sont continue (par morceaux) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.)
2. Remarquons que :
$$\lim_{n\to+\infty} \sin^n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
Posons $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{array} \right.$
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (et f est bien continue par morceaux sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.)
3. Remarquons en dernier lieu que :
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad |f_n(x)| \leqslant 1.$$
Or la fonction $\varphi : x \mapsto 1$ est bien (continue par morceaux et) intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Le théorème de convergence dominée assure que :

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 0.$$

Exemple : Déterminer la limite de la suite (I_n) définie par :

$$I_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin(t)^n f(t)dt$$

où f est une fonction continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ à valeurs réelles.

Correction :

Effectuons le changement de variable $v = \sin^n(t)$ ce qui revient à $t = \mathsf{Arcsin}(v^{\frac{1}{n}})$. Ainsi : $dv = n\cos(t)\sin(t)^{n-1}$. On en déduit que :

$$I_n = \int_0^1 v^{\frac{1}{n}} f(\mathsf{Arcsin}(v^{\frac{1}{n}}))dv = \int_0^1 e^{\frac{1}{n}\ln(v)} f(\mathsf{Arcsin}(v^{\frac{1}{n}}))dv$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : \left\{ \begin{array}{rcl}]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & e^{\frac{1}{n}\ln(v)} f(\mathsf{Arcsin}(v^{\frac{1}{n}})) \end{array} \right.$$

1. Remarquons que pour tout $v \in]0, 1]$:

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(v)} f(\mathsf{Arcsin}(v^{\frac{1}{n}})) = f(\mathsf{Arcsin}(1)) = f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

   car $\lim\limits_{n\to+\infty} v^{\frac{1}{n}} = 1$ et f est continue en $\frac{\pi}{2}$.
   La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl}]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & f\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right.$$

2. Remarquons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall v \in]0,1], \quad |f_n(v)| \leqslant \|f\|_{\infty;[0,\frac{\pi}{2}]} = \varphi(v)$$

   et φ est intégrable sur $]0, 1]$.

D'après le théorème de convergence dominée, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 g(v)dv = \int_0^1 f\left(\frac{\pi}{2}\right)dv = \boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right).}$$

□

Exercice C2 : [Mines-Télécom]
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}.$$

Trouver un développement asymptotique à deux termes de la suite (u_n).

Exercice C3 : [CCINP]
On définit pour $n \geqslant 2$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}dt$.
Prouver l'existence de I_n et déterminer la limite de la suite (I_n).

Exercice C4 : [Mines-Télécom]
Étudier la suite de terme général

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n}(x)}{x^2}\,dx.$$

Exercice C5 : [CCINP]
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ bornée et telle que $f(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent en l'infini de

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}dt.$$

Exercice C6 : [CCINP]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$ on pose :

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx + x^2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est prolongeable par continuité en 0 . Dans la suite, on considère que les f_n sont ainsi prolongées en 0 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x$$

   Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

Exercice C7 : [Mines-Ponts]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note sous réserve d'existence :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(n+x)}{\sqrt{x}(n+x)} \mathrm{d}x$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de I_n.
2. Déterminer $\lim_{n \to \infty} I_n$.
3. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(n+x)} \mathrm{d}x$.
4. Déterminer un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

10.1.3 Théorème de convergence dominée-cas continue

On peut généraliser ce théorème de convergence dominée au cas où le paramètre n'est plus entier mais réel.

Théorème 3 (Théorème de convergence dominée-cas continue)

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $(f_y)_{y\in J}$ une famille de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbf{K}$. On suppose :

1. Pour tout x de $I, y \mapsto f_y(x)$ admet une limite finie notée $f(x)$ quand y tend vers $y_0 \in \bar{J}$.
2. La fonction f est continue par morceaux.
3. Hypothèse de domination : Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que

$$\forall y \in J, \quad |f_y| \leqslant \varphi$$

Alors f est intégrable sur I et

$$\lim_{y\to y_0} \int_I f_y = \int_I f$$

Remarques :

1. L'hypothèse de domination assure que les f_y sont intégrables sur I.
2. Le programme officiel stipule qu'il n'est pas nécessaire de mentionner les hypothèses de continuité par morceaux.

Exercice E8 : Pour tout $y \in \mathbf{R}_+$on pose

$$f_y : \begin{cases} \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R} \\ t \mapsto \dfrac{e^{-yt}}{1+t^2} \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \int_0^\infty f_y(y)dt$.

Exercice C9 : [CCINP]
On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Prouver que F est définie sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

10.1.4 Intégration terme à terme d'une somme d'une série de fonctions

Théorème 4 (Intégration terme à terme - cas positif)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.
On suppose :

1. La série de fonctions converge simplement sur I vers une fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
2. Les fonctions f_n et S sont continues par morceaux.
3. Les fonctions f_n sont intégrables sur I

Alors, dans $[0, +\infty]$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \int_I S$$

En particulier, la fonction S est intégrable sur I si, et seulement si, la série $\sum \int_I f_n$ converge.

Remarque : D'après le programme officiel, il n'est pas nécessaire de vérifier que les fonctions f_n et S sont continues par morceaux.

Exercice A10 :
Pour $n \geqslant 1$, on considère

$$f_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$$

définie sur $]\,0, +\infty\,[$.
Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$?

Théorème 5 (Intégration terme à terme)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose que :

1. La série de fonction $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2. Les fonctions (f_n) et S sont continues par morceaux sur I.
3. Les fonctions f_n sont intégrables sur I.
4. La série numérique $\displaystyle\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors la fonction S est intégrable sur I et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \int_I S.$$

Remarques :

1. L'hypothèse principale est la convergence de la série numérique $\displaystyle\sum \int_I |f_n|$.
2. D'après le programme officiel, il n'est pas nécessaire de vérifier que les fonctions f_n et S sont continues par morceaux.

Exemple : Montrons que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Remarquons qu'en tant que série géométrique :

$$\forall t \in [0,1[, \quad -\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{t-1}.$$

Ainsi :

$$\forall t \in]0,1[, \quad \frac{\ln(t)}{t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\ln(t)t^n\right).$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : \left\{ \begin{array}{rcl}]0,1[& \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & -\ln(t)t^n \end{array} \right.$$

1. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers $S : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t-1}$.
2. Montrons que les fonctions f_n sont bien intégrables sur $]0,1[$. On remarque que f_n est positives sur $]0,1[$ et :
$$t^{\frac{1}{2}} f_n(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$$
 Ainsi $f_n(t) = \underset{t\to 0^+}{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$.
Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $]0,1[$ en tant qu'intégrale de Riemann, il en est de même pour f_n.
D'autre part, $\displaystyle\lim_{t\to 1} f_n = 0$. La fonction f_n est donc prolongeable par continuité en 1.
On en déduit que f_n est intégrable sur $]0,1[$.
3. Étudions en dernier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n|$. Une intégration par parties donne
$$\int_0^1 |f_n| = \int_0^1 -\ln(t)t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2}.$$
 Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2}$ est donc convergente en tant que série de Riemann.
Finalement, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n|$ est convergente.

Le théorème d'intégration terme à terme d'une somme d'une série de fonctions permet de conclure que S est intégrable sur $]0,1[$ (ce qui était facile à vérifier) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 S(t)dt.$$

Ce qui revient à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt$$

En effectuant un changement d'indice :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt$$
$$\frac{\pi^2}{6} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt$$

Exemple : Exprimons $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$ sous la forme de la somme d'une série.
Remarquons que pour tout $x \in]0,1[$ (en fait sur $[0,1[$), on a l'égalité :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

D'autre part, la fonction $S : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$ est continue et négative sur $]0,1]$ et

$$\frac{\ln(x)}{1+x^2} \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)$$

Or $x \mapsto \ln(x)$ est intégrable sur $]0,1]$.
On en déduit que $S : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0,1]$.
Finalement, on a l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \int_0^1 \ln(x) \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \ln(x)(-1)^k x^{2k} dx$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : \left\{ \begin{array}{rcl}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x)(-1)^k x^{2k} \end{array} \right.$$

1. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction S.
2. Les fonctions f_n sont bien intégrables sur $]0,1[$. En effet : Pour $n=0$, $f_0 : x \mapsto \ln(x)$ qui est intégrable sur $]0,1]$.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque :
   $$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} f_n(x) = 0.$$
   Les fonctions f_n sont prolongeables par continuité en 0 et 1. Elles sont donc intégrables sur $]0,1[$.
3. Étudions la série $\sum \int_0^1 |f_n|$. Calculons :
   $$\int_0^1 |f_n| = \int_0^1 -x^{2n}\ln(x)dx = \frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2} > 0.$$
   Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{4n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann.

   D'après le théorème de comparaison des séries positives par équivalent, on en déduit que $\sum \int_0^1 |f_n|$ est convergente.

En conclusion, le théorème d'intégration terme à terme donne :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^k x^{2k}\ln(x)dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}.$$

Exercice C11 : [Mines Télécom] Établir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\ \mathrm{d}t}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice C12 : [Mines-Télécom]
Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Exercice C13 : [Mines-Ponts]
On définit une fonction f par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{sh}(x\sqrt{t})\mathrm{d}t$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer ce développement en série entière.
3. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice C14 : [CCINP]

1. Montrer que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\mathrm{d}x$ est bien définie.
2. Donner la décomposition en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ et préciser son rayon de convergence.
3. Écrire I comme somme d'une série.
4. Donner la valeur exacte de I sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice C15 : [CCINP] Soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I converge.
2. Montrer que $\mathrm{I} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice C16 : [CCINP]
Soit $(a_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{a_n}{n!}x^n e^{-x} \end{array} \right.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée f.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice C17 : [CCINP]
On pose :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer l'existence de I.
2. Existence et calcul de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-nx}$ pour $x \geqslant 0$.
3. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$

10.2 Intégrales à paramètres

10.2.1 Limite d'une intégrale à paramètres

Théorème 6

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : J \times I \to \mathbb{K}$ une fonction. Soit $a \in \overline{J}$ (éventuellement infini).
On suppose que :

1. Pour tout $x \in J$, la fonction $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
2. Pour tout $t \in I$, $\lim\limits_{x \to a} f(x,t) = \ell(t) \in \mathbb{K}$ où ℓ est une fonction continue par morceaux sur I.
3. Hypothèse de domination :
   Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :
$$\forall x \in J, \quad \forall t \in I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors la fonction ℓ est intégrable sur I et la fonction $F : \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)dt \end{array} \right.$ admet une limite en a et :

$$\lim_{x \to a} F(x) = \int_I \lim_{x \to a} f(x,t)dt = \int_I \ell(t)dt.$$

Remarques :

1. Ce théorème est en fait du cas continue du théorème de convergence dominée dans lequel on a changé de notation avec $F(x,t) = f_x(t)$.
2. La conclusion est une interversion limite et intégrale. En effet, la conclusion peut s'écrire :
$$\lim_{x \to a} \int_I f(x,t)dt = \int_I \lim_{x \to a} f(x,t)dt.$$
3. Le programme officiel dit : "Pour l'application pratique des énoncés, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t".

Preuve : Nous allons utiliser la caractérisation séquentielle de la limite. Soit (x_n) une suite à valeurs dans J telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$. Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} F(x_n) = \displaystyle\int_I \ell(t)dt$.
Introduisons la suite de fonctions (f_n) :
$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & f(x_n, t) \end{array} \right.$$

1. Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur I
2. Pour tout $t \in I$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n, t) = \ell(t)$ d'après le théorème de composition des limites. Rappelons que la fonction ℓ est bien continue par morceaux sir I.
3. Hypothèse de domination :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in I, \quad |f(x_n,t)| \leqslant \varphi(t).$$
   La fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I.

Le théorème de convergence dominée assure que f_n et ℓ sont intégrables sur I et :
$$\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n = \int_I \ell.$$

Ce qui revient :
$$\lim_{n \to +\infty} F(x_n) = \int_I \ell(t)dt.$$

D'après la caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que :

$$\lim_{x\to a} F(x) = \int_I \ell(t)dt.$$

$\square$

Exemple : Déterminons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}dt$.

Soit $x \geqslant 1$. Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}dt$ est bien définie. En effet, la fonction $t \mapsto e^{-x^2t^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. D'autre part :

$$e^{-x^2t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. On en déduit que $t \mapsto e^{-x^2t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc sur $[0,+\infty[$.
Posons :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [1,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ (x,t) & \mapsto & e^{-x^2t^2} \end{array} \right.$$

Vérifions les hypothèse du théorème de la limite d'une intégrales à paramètres.

1. Soit $t \in [0,+\infty[$. Remarquons que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,t) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2t^2} = 0.$$

   Posons $\ell : t \mapsto 0$.

2. Hypothèse de domination :

$$\forall x \in [1,+\infty[,\quad \forall t \in [0,+\infty[,\quad |f(x,t)| = e^{-x^2t^2} \leqslant e^{-t^2}$$

   Posons $\varphi : t \mapsto e^{-t^2}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$ (justification déjà faite au tout début dans le cas où $x = 1$).

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}dt &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,t)dt = \int_0^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} f(x,t)dt \\ &= \int_0^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\ell(t)dt = \int_0^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} 0dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exercice A18 : Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-xt}dt$

Meth 7

Pour étudier la limite d'une intégrales à paramètres, il peut être judicieux d'essayer de raisonner à l'aide d'arguments plus élémentaires comme le théorème de comparaison des limites avant d'appliquer le théorème de la limite d'une intégrales à paramètres.

Exemple : Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(t+t^2)}}{1+e^t}dt$.

Montrons que F est bien définie sur $[0,+\infty[$. Soit $x \in [0,+\infty[$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-x(t+t^2)}}{1+e^t}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$.

Remarquons que :

$$\frac{e^{-x(t+t^2)}}{1+e^t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ en tant qu'intégrale de Riemann. Donc $t \mapsto \frac{e^{-x(t+t^2)}}{1+e^t}$ est sur $[1,+\infty[$, donc sur $[0,+\infty[$.
Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ à l'aide du théorème de comparaison des limites. Soit $x \in [1,+\infty[$:

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad 0 \leqslant \frac{e^{-x(t+t^2)}}{1+e^t} \leqslant \frac{e^{-xt}}{2}.$$

Or $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On obtient :

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(t+t^2)}}{1+e^t} dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{2} dt = \frac{1}{2x}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$. Le théorème d'encadrement des limites assure que :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

<u>*Exercice A19*</u> *:* Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1. Justifier que F est bien définie sur $[0,+\infty[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ à l'aide du théorème de comparaison des limites.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ à l'aide du théorème de de la limite d'une intégrales à paramètres.

10.2.2 Théorème de continuité

Théorème 8 (Théorème de continuité des intégrales à paramètres)

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une fonction. On suppose que :

1. Pour tout $t \in I$, la fonction $f(\cdot, t) : x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.
2. Pour tout $x \in A$, la fonction $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
3. <u>Hypothèse de domination</u> : $(\star)$
   Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall x \in A, \quad \forall t \in I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est définie et continue sur A.

<u>*Preuve*</u> *:* Le principe de la démonstration est similaire à la preuve du théorème de la limite d'une intégrales à paramètres. Il suffit d'utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité. □

Meth 9

Il est parfois difficile de trouver une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie l'hypothèse de domination.
On peut alors remplacer le point 3. du théorème de continuité des intégrales à paramètres par l'hypothèse suivante :

3. Hypothèse de domination sur des voisinages :
   Pour tout point $a \in A$, il existe un voisinage de V de a dans A et une fonction $\varphi_V : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :
$$\forall x \in V, \quad \forall t \in I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi_V(t).$$

Preuve : Il suffit d'appliquer pour tout $a \in A$, le théorème de continuité des intégrales à paramètres à la restriction $f_{V\times I}$ On en déduit que F est bien définie et continue au voisinage de tout point a de A, donc sur A.

□

Meth 10

Dans le cas où A est un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut alors remplacer le point 3. du théorème de continuité des intégrales à paramètres par l'hypothèse suivante :

3. Hypothèse de domination sur un segment :
   Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans A, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :
$$\forall x \in [a,b], \quad \forall t \in I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi_{a,b}(t).$$

Exercice E20 : [Transformée de Fourier]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose
$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) \mathrm{d}t$$
Justifier que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice E21 : [Produit de convolution] Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, continues et T-périodiques (T réel strictement positif). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f * g(x) = \int_0^T f(x-t)g(t)dt$$

1. Montrer que la fonction $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue et T-périodique.
2. La loi $*$ est donc une loi interne sur E, l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques. Montrer que cette loi est commutative.

Exercice E22 : On pose
$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que g est continue sur $]-\infty, 1[$.
3. Montrer que
$$f(x) \underset{x\to 0^+}{=} \frac{1}{x} + o(1) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to 1^-}{=} \frac{1}{1-x} + o(1)$$

10.2.3 Théorème de dérivabilité

Théorème 11 (de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètres)

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : J \times I \to \mathbb{K}$ une fonction.
On suppose que :

1. Pour tout $t \in I$, la fonction $f(\cdot, t) : x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.
2. Pour tout $x \in J$, la fonction $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
3. Pour tout $x \in J$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) : t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
4. Hypothèse de domination pour $\frac{\partial f}{\partial x}$:
   Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :
$$\forall x \in J, \quad \forall t \in I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

Alors la fonction $F : \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)dt \end{array} \right.$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et :
$$\forall x \in J, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Meth 12

On peut alors remplacer le point 4. du théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètres par l'hypothèse suivante :

4. Hypothèse de domination sur un segment pour $\frac{\partial f}{\partial x}$:
   Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans A, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :
$$\forall x \in [a,b], \quad \forall t \in I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{a,b}(t).$$

Exercice C23 : [CCINP]
On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t+1}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner une équation différentielle vérifiée par g sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Donner un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice C24 : [CCINP]

1. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}, |\arctan(u)| \leqslant |u|$.
2. On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t\,(1+t^2)}\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que F et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer F'.
   (b) En déduire F.

10.2.4 Théorème de classe $\mathcal{C}^k$

Théorème 13 (de classe $\mathcal{C}^k$ des intégrales à paramètres)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit X et I des intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : X \times I \to \mathbb{K}$.
On suppose que :

1. Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur X.
2. Pour tout $x \in X$ et pour tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
3. Pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I
4. Pour tout segment $[a,b] \subset J$, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$$

Alors la fonction $g : \begin{cases} X \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur X et on a :

$$\forall p \in [\![1, k]\!], \quad \forall x \in X, \quad g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)dt.$$

Remarque : D'après le programme officiel, "pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t."

Exercice C25 : [Mines Télécom]

Soit $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t}\ \mathrm{d}t$

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et paire.
2. Montrer que $|\sin u| \leqslant |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer F''.
4. Déterminer la fonction F.

Exercice C26 : [Centrale] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

1. Montrer que $f^2 + g$ est constante. Quelle est sa valeur ?
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

Exercice C27 : [CCINP]

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$. On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. (a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. (a) Montrer que f est solution de (E) $: y' - y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$.
   (b) Déterminer la fonction f.

Exercice C28 : [Mines-Ponts]
On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{tx}}{t} e^{-t}\, dt$. Déterminer le domaine de définition de F et expliciter $F(x)$.

Théorème 14 (de classe $\mathcal{C}^\infty$ des intégrales à paramètres)

Soit $f : J \times I \to \mathbb{K}$ une fonction où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
On suppose que :

1. Pour tout $t \in I$, $f(.,t) : x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J.
2. Pour tout x de J et tout $i \in \mathrm{N}$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ est continue par morceaux.
3. Hypothèse de domination : Pout tout $i \in \mathrm{N}$, pour tout segment $[a,b]$ inclus dans J, il existe une fonction $\varphi_{i,a,b} : I \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall x \in [a,b], \quad \forall t \in I, \quad \left|\frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{i,K}(t)$$

Alors, pour tout $x \in J$, pour tout $i \in \mathrm{N}, t \mapsto \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ est intégrable sur I, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J et

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in J, \quad F^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt$$

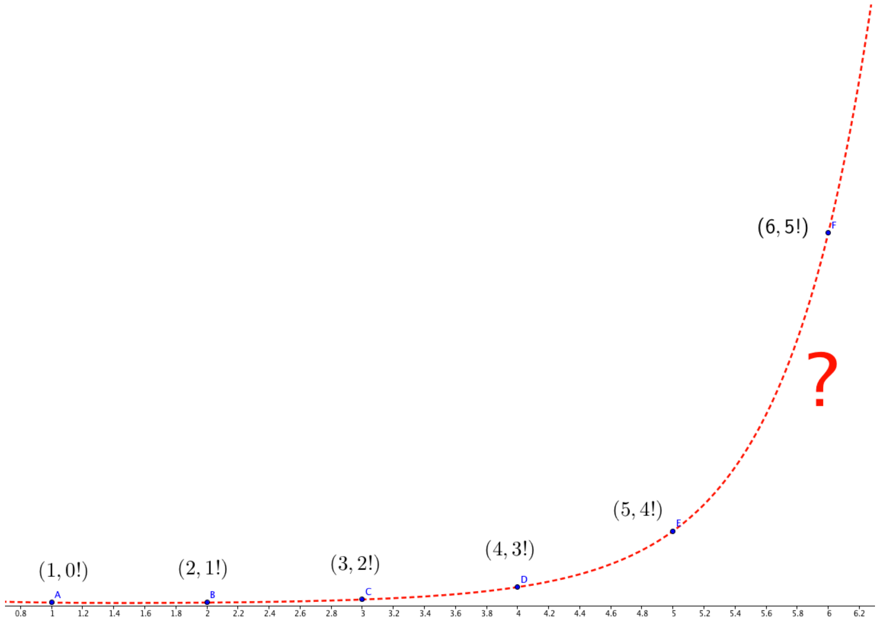
10.3 Complément : la fonction Gamma d'Euler

Rappelons la définition de $n!$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! = \underbrace{1 \times 2 \times \cdots \times n}_{n \text{ facteurs}}$. Nous sommes à la recherche d'une fonction f définie sur $]0,+\infty[$ "prolongeant factoriel". En d'autres termes, peut-on trouver une fonction f sur $]0,+\infty[$ vérifiant :

$$f(n+1) = n! \quad \text{et} \quad f(1) = 0! = 1 \quad ?$$

Graphiquement ceci revient à chercher une courbe passant par les points :

$$\begin{cases} A = (1, 0!) \\ B = (2, 1!) \\ C = (3, 2!) \\ D = (4, 3!) \\ E = (5, 4!) \\ \vdots \end{cases} ?$$



Cette question fût l'objet d'une correspondance en 1720 entre Daniel Bernoulli et Christian Goldbach. Dix ans plus tard, Leonhard Euler apporte une réponse en introduisant la fonction Gamma que nous allons étudier dans ce paragraphe et que nous retrouverons en probabilités.

Théorème 15

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante :

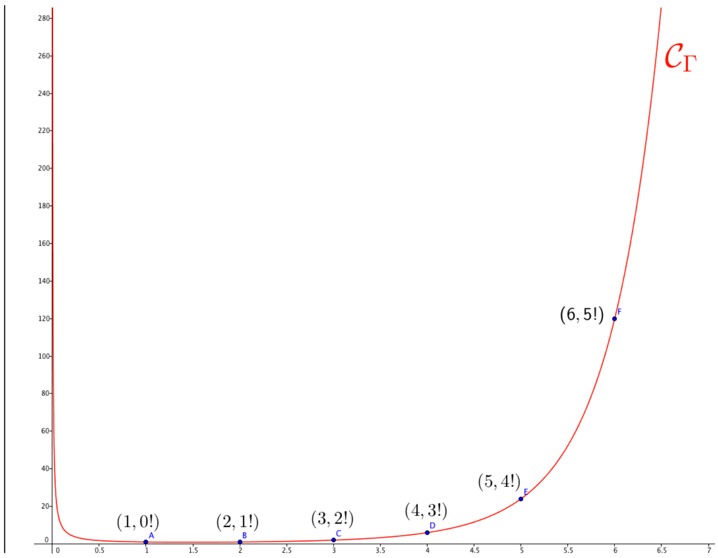
$$\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \text{ est convergente si, et seulement si, } x > 0$$

Définition 16

On appelle fonction Gamma notée Γ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\Gamma : \begin{cases}]0,+\infty[\to]0,+\infty[\\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \end{cases}$$

Remarque : On peut prouver que $\lim_{x \to 0} \Gamma(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \Gamma(x) = +\infty$.



Théorème 17

1. $\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$

Théorème 18

La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Preuve :
Posons $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \to &]0,+\infty[\\ (x,t) & \mapsto & t^{x-1}e^{-t} \end{array} \right.$
qui est bien définie sur $]0,+\infty[^2$. Vérifions les hypothèses du théorème de classe $\mathcal{C}^\infty$ des intégrales à paramètres.

1. Soit $t \in]0,+\infty[$ fixé.
   Remarquons que $f(\cdot,t)$ est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et :
   $$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t}$$
2. Hypothèse de domination sur un segment pour $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$:
   Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $]0,+\infty[$. Soit $x \in [a,b]$. Remarquons que :
   $$\forall t \in]0,+\infty[, \quad 0 \leqslant |(\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t}| = |\ln(t)|^k e^{(x-1)\ln(t)} e^{-t} \leqslant \begin{cases} \ln(t)^k e^{(b-1)\ln(t)} e^{-t} & \text{si } t \geqslant 1 \\ |\ln(t)|^k e^{(a-1)\ln(t)} e^{-t} & \text{si } 0 < t < 1 \end{cases}$$
   Posons :
   $$\varphi_{a,b,k} : t \mapsto \begin{cases} \ln(t)^k e^{(b-1)\ln(t)} e^{-t} & \text{si } t \geqslant 1 \\ |\ln(t)|^k e^{(a-1)\ln(t)} e^{-t} & \text{si } 0 < t < 1 \end{cases}$$
   Remarquons que $\varphi_{a,b,k}$ est bien continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et :
   $$\forall t \in]0,+\infty[, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{a,b,k}(t).$$
   Prouvons que que $\varphi_{a,b,k}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. La fonction $\varphi_{a,b,k}$ est positive sur $]0,+\infty[$.
   Étudions l'intégrabilité sur $]0,1]$. Comme $a > 0$, on remarque que $1-a < 1$. Soit $\alpha \in]1-a,1[$, on a :
   $$|\ln(t)|^k t^{a-1} e^{-t} \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$$
   En effet par croissance comparée $\lim\limits_{t\to 0^+} |\ln(t)|^k t^{a-1-\alpha} e^{-t} = 0$ puisque $a-1-\alpha > 0$. Or $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $\alpha < 1$.
   Donc $\varphi_{a,b,k}$ est intégrable sur $]0,1]$.
   Étudions l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$. D'après les croissances comparées,
   $$\varphi_{a,b,k}(t) = \ln(t)^k t^{b-1} e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$
   Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ avec $2 > 1$. Donc $\varphi_{a,b,k}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   En conclusion, Donc $\varphi_{a,b,k}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

En conclusion, Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

$\square$

Exercice E29 :

1. Soit $x > 0$. Rappeler la relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$. En déduire un équivalent de Γ en 0^+.
2. Montrer qu'il existe $c \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.
3. Montrer que $\ln \circ \Gamma$ est convexe sur $]0,+\infty[$. (On utilisera l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

Exercice E30 : Soit $x > 0$.

1. Montrer que :
$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$
2. Prouver que :
$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{i=0}^{n} (x+i)}$$
3. En utilisant la formule de Stirling et $\Gamma(\frac{1}{2})$, en déduire que :
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$