Chapitre 11

Probabilités

Sommaire

11.1 Espaces probabilités

11.1.1 Tribus et événements

Rappelons le concept de hasard a été formalisé avec la théorie mathématique de Kolmogorov en 1933 dans son livre "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung". Nous poursuivons la présentation de cette théorie moderne en MP.

11.1.2 Tribus et espace probabilisable

Définition 1

Soit Ω un ensemble. Soit $\mathcal{A}$ une partie de sous-ensemble de Ω ($\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$).
On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω (ou une σ-algèbre sur Ω) si, et seulement si,

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. $\forall A \in \mathcal{A},\ \overline{A} \in \mathcal{A}$.
3. Pour tout famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un élément de $\mathcal{A}$.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés événements. Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable.

Exemples :

1. $\mathcal{A} = \{\Omega, \varnothing\}$ est une tribu de Ω.
2. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{A} = \{\Omega, \varnothing, A, \overline{A}\}$ est une tribu de Ω.
3. Si $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{\mathbb{R}, \varnothing, [0,1], \overline{[0,1]}\}$ est une tribu de $\mathbb{R}$.
4. $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de Ω.
5. On considère des tirages à pile ou face. On a alors $\Omega = \{P, F\}$ et $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{P\}, \{F\}, \{P, F\}\}$
6. Si l'on considère le lancer d'un dè à six faces, on peut prendre comme univers :

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

   L'événement : "le résultat du lancer est pair" est : $\{2,4,6\}$.

Proposition 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Alors :

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$.
2. Pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, on a : $A \cup B \in \mathcal{A} \qquad A \cap B \in \mathcal{A} \qquad A - B \in \mathcal{A}$.
3. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Définition 3

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Soit $\omega \in \Omega$.

1. L'événement Ω (resp. $\varnothing$) est appelé événement certain (resp. impossible).
2. Si la tribu contient un événement du type $\{\omega\}$ alors ce dernier est appelé événement élémentaire.
3. Soit $A, B \in \mathcal{A}$, on dit que A et B sont incompatibles si, et seulement si, $A \cap B = \varnothing$.
4. Une famille finie $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ d'événements est appelée système complet d'événements si, et seulement si :
$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!],\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing \qquad \text{et} \qquad \Omega = \bigcup_{n=1}^{p} A_n.$$
5. Une famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements est appelée système complet d'événements si, et seulement si :
$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing \qquad \text{et} \qquad \Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

11.1.3 Probabilités

Définition 4

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P} \colon \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles, on a la propriété de σ-additivité :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

Remarques :

1. Dés que l'on a une famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux compatibles, la série $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ est automatiquement convergente.
2. Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ une famille finie d'événements deux à deux incompatibles, la σ-additivité devient :
$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p) = \sum_{n=1}^{p} \mathbb{P}(A_n).$$
3. Soit X une variable aléatoire discrète avec $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ avec I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Rappelons que $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système complet d'événements. La σ-additivité donne :
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}[X = x_i].$$

Vocabulaire et définition 5

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Un événement $A \neq \Omega$ de probabilité 1 est dit certain presque sûrement ou quasi certain.
2. Un événement $A \neq \varnothing$ de probabilité 0 est dit quasi impossible (ou presque impossible).
3. Une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements est appelée système presque complet d'événements si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing \qquad \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \neq \Omega \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$$

Autrement dit l'événement $\Omega - \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est impossible presque sûrement.

Proposition 6 (Règles de calcul)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour tout couple (A, B) d'événements, on a :

1. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
2. $\mathbb{P}(A - B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$,
3. Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ (on dit que $\mathbb{P}$ est une application croissante sur $\mathcal{A}$ pour l'inclusion),

Théorème 7 (Formule du crible de Poincaré)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit $A, B \in \mathcal{A}$, $\quad \mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
2. Soit $A, B, C \in \mathcal{A}$, $\quad \mathbb{P}[A \cup B \cup C] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[B \cap C] - \mathbb{P}[A \cap C] + \mathbb{P}[A \cap B \cap C]$.

Théorème 8 (Limite monotone)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

1. On suppose que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$ alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

2. On suppose que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$ alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Preuve : Il suffit de remarquer que les suites $\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante. On applique alors le théorème de la limite monotone. $\square$

11.2 Conditionnement et indépendance

Définition 9

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}[B] \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle sachant que l'événement B est réalisé l'application :

$$\mathbb{P}_B : \begin{cases} \mathcal{A} \longrightarrow [0,1] \\ A \longmapsto \dfrac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \end{cases}$$

Ainsi par définition, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Remarques :

1. Dans certains anciens sujets, on rencontre aussi la notation $\mathbb{P}[A|B]$ au lieu de $\mathbb{P}_B(A)$.
2. Intuitivement, $\mathbb{P}_B[A]$ représente la probabilité de A sachant l'événement B réalisé.

Théorème 10

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}[B] \neq 0$. Alors $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ qui vérifie :

1. $\mathbb{P}_B[B] = 1$
2. Pour tout événement A, $\mathbb{P}_B[\overline{A}] = 1 - \mathbb{P}_B[A]$.
3. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles, on a la propriété de σ-additivité :

$$\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_B(A_n)$$

On peut ainsi définir un nouvel espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_B)$.

Définition 11 (Indépendance)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. On dit que deux événements A et B sont dits indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si, et seulement si,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

2. Les événements de la famille $(A_1, \dots, A_p)$ sont dits mutuellement indépendants si et seulement si :

$$\forall k \in [\![1,p]\!], \quad \forall i_1, \dots, i_k \in [\![1,p]\!] \text{ tel que } 1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant p, \quad \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

3. Les événements de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dits mutuellement indépendants si et seulement si :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \forall i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N} \text{ tel que } i_1 < \dots < i_k, \quad \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Remarque : Soit A, B deux événements indépendants avec $\mathbb{P}[B] \neq 0$. On a alors :

$$\mathbb{P}_B[A] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[B]} = \mathbb{P}[A].$$

11.2.1 Formule des probabilités composées

Théorème 12 (Formule des probabilités composées)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements telle que $\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0.}$ Alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Dans le cas où les événements sont mutuellement indépendants, la formule devient :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n)$$

Remarque : On utilise cette formule dans le cas où $A_1, \dots, A_n$ sont des événements chronologiques (comme dans les urnes évolutives).

11.2.2 Formule des probabilités totales

Théorème 13 (Formule des probabilités totales)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit $(A_0, \dots, A_m)$ un système (presque) complet d'événements. Soit B un événement. Alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}(A_n \cap B).$$

   dans le cas où pour tout $n \in [\![0, m]\!]$, $\mathbb{P}[A_n] \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B).$$

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système (presque) complet d'événements. Soit B un événement. Alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B).$$

   dans le cas où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}[A_n] \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B).$$

11.2.3 Formule de Bayes

Théorème 14 (Première formule de Bayes)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}[B] \neq 0$ et $\mathbb{P}[A] \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}_B[A] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}_A[B]\mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[B]}.$$

Remarques :

1. La formule de Bayes permet d'échanger les événements A et B. On l'appelle parfois "formule de la probabilités des causes".
2. Soit O une observation et H une hypothèse. La probabilité $\mathbb{P}_H[O]$ donne la probabilité d'observer O sachant l'hypothèse H vérifiée. La probabilité $\mathbb{P}_O[H]$ mesure la plausibilité de l'hypothèse H sachant que l'on a observé O. Ceci nous conduit à la méthode statistique d'inférence bayésienne.

Théorème 15 (Deuxième formule de Bayes)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit B un événement.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système (presque) complet d'événements tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}[A_n] \neq 0$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}_{A_k}[B]\mathbb{P}[A_k]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)}$$

Exercice C1 : [Mines-Ponts]
La probabilité qu'une famille possède n enfants vaut αp^n, où α et p sont des réels strictement positifs fixés indépendants de n.

1. Déterminer α en fonction de p.
2. Quelle est la probabilité que la famille possède k garçons (on suppose qu'à chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit un garçon est égale à $\frac{1}{2}$).
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins deux garçons sachant qu'il y en a au moins un ?

Exercice C2 : [Mines-Ponts]
Un objet a une probabilité p d'être dans un meuble. Ce meuble contient 8 tiroirs. Sachant que l'on a ouvert les 7 premiers tiroirs et que l'objet ne s'y trouvait pas, quelle est la probabilité qu'il soit dans le dernier ?

Exercice C3 : [CCINP] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit A un évènement. On note $\bar{A}$ l'évènement contraire de A. Montrer que $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\bar{A}) \leqslant \frac{1}{4}$.
2. Soit A et B deux évènements.
   (a) Montrer que $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\bar{A} \cap B) - \mathrm{P}(A \cap B)\mathrm{P}(\bar{A})$.
   (b) En déduire que $|\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)| \leqslant 1/4$.

Exercice C4 : [Mines-Ponts]
Deux urnes U_1 et U_2 contiennent a boules blanches et b boules rouges. On tire en parallèle (et indépendamment), avec remise, dans chacune des urnes.
Trouver la probabilité d'avoir tiré au moins deux fois plus de boules dans U_1 que dans U_2, avant d'avoir obtenu la première boule blanche.

Exercice C5 : [Mines-Ponts]
Une urne contient une boule rouge et une boule blanche ; on effectue des tirages successifs avec remise. Si on tire une boule rouge, on la remet dans l'urne avec deux autres boules rouges. Quelle est la probabilité de tirer n boules rouges consécutives ? Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules rouges ? Même question en rajoutant p boules à chaque tirage.

Exercice C6 : [Mines-Ponts]
Des personnes $P_1, \ldots, P_n$ se transmettent un signe + ou - avec la probabilité p de le passer inchangé et la probabilité $q = 1 - p$ de le changer. La personne 1 reçoit le signe $+$. Sachant que P_n a reçu le signe $+$, quelle est la probabilité que P_1 ait transmis son signe sans le changer ?

Exercice C7 : [Mines-Ponts] On considère un dé rouge truqué qui donne 6 avec la probabilité $p \in]0,1[$ (les autres issues étant équiprobables) et un dé blanc non truqué. On lance simultanément les deux dés, un pour chaque joueur. En cas d'égalité des deux dés, le dé blanc qui l'emporte. Quel dé faut-il choisir ?

Exercice C8 : [Mines-Ponts]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble $\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})^2$ de la distribution uniforme. Déterminer la probabilité que deux parties (A, B) soient disjointes.

Exercice C9 : [Mines-Ponts]
Deux joueurs A et B tirent une pièce non truquée à tour de rôle. Le premier qui obtient pile gagne. A commence. Quelle est la probabilité que A gagne ?

Exercice E10 : [Probabilité d'obtenir deux piles consécutifs]
On lance une infinité de fois une pièce donnant pile avec probabilité $p > 0$ et face avec probabilité $1 - p$. Quelle est la probabilité d'obtenir deux piles consécutifs au cours de ces lancers ?

Exercice E11 : [Lemme de Borel-Cantelli et loi du zéro-un de Borel]
Soit $(\mathrm{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose $\mathrm{B}_n = \bigcup_{k \geqslant n} \mathrm{A}_k$ et $\mathrm{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{B}_n$.

1. On suppose que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ converge.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$.
   (b) En déduire que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 0$.
2. On suppose que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ diverge.
   (a) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que
   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{\mathrm{A}_k}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)\right)$$
   (b) En déduire que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1$.

Proposition 16

On suppose que Ω est fini ou dénombrable et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

1. Si $\mathbb{P}$ est une probabilité, on pose pour tout $\omega \in \Omega, \quad p_\omega = P(\{\omega\})$.
   La famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est sommable et de somme 1.
2. Réciproquement si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une famille sommable et de somme 1, il existe une unique probabilité P telle que pour tout $\omega \in \Omega, \quad p_\omega = P(\{\omega\})$.
   Dans ce cas,
   $$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

Preuve : La preuve dans la cas où Ω est fini a été vue en MPSI. Nous allons traité le cas où Ω est dénombrable.
Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans Ω.

1. On pose pour tout $n \in \mathrm{N}, A_n = \{\varphi(n)\}$.
La famille $(A_n)_{n\in\mathrm{N}}$ est composée d'événements deux à deux incompatibles. On a ainsi

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{\varphi(n)}.$$

On en déduit que la famille $\left(p_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathrm{N}}$ est sommable de somme 1.
Ainsi la famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est sommable et de somme 1 .

2. Considérons une famille sommable $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de somme 1. Soit P la fonction définie par

$$P : A \mapsto \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

On a bien $P(\Omega) = 1$ et P est à valeurs dans [0,1].
Considérons une suite $(A_n)_{n\in\mathrm{N}}$ de parties deux à deux incompatibles de Ω.
On pose $B = \bigcup_{n\in\mathrm{N}} A_n$.
Comme la famille $(p_\omega)_{\omega\in B}$ est sommable et, par sommation par paquets (puisque les A_n forment une partition de B)

$$P(B) = \sum_{\omega\in B} p_\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\omega\in A_n} p_\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

□

11.3 Variables aléatoires discrètes

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{A})$ désignera un espace probabilisable quelconque et E un ensemble non vide.

Définition 17

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et E un ensemble non vide. On appelle variable aléatoire discrète toute application $X : \Omega \to E$ telle que :

1. $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable ;
2. Pour tout $x \in X(\Omega), X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

L'événement $X^{-1}(\{x\})$ est traditionnellement noté $(X = x)$ ou $\{X = x\}$ ou $[X = x]$.

Remarques :

- Malgré son nom, une variable aléatoire n'est pas une variable (c'est une fonction) et elle n'est pas aléatoire.
- Lorsque $E = \mathbb{R}$ (la situation la plus courante), la variable aléatoire discrète est qualifiée de réelle.
- $X(\Omega)$ est l'image (directe) de Ω par X.
  Comme $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, on pourra écrire $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Si Ω est au plus dénombrable, il en va de même pour $X(\Omega)$.
  Dans ce cas, on constate qu'en munissant Ω de sa tribu naturelle $\mathcal{P}(\Omega)$, toute fonction de Ω dans E est une variable aléatoire.

Notation 18

Si $A \subset E, X^{-1}(A)$ désigne l'image réciproque de A par X :

$$X^{-1}(A) \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \underset{\text{notation}}{=} (X \in A)$$

Dans le cas où X est une variable aléatoire réelle, on note également :

$$\begin{aligned}
(X \leqslant x) &= X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\} \\
(X < x) &= X^{-1}(]-\infty, x[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\} \\
(X \geqslant x) &= X^{-1}([x, +\infty[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\} \\
(X > x) &= X^{-1}(]x, +\infty[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}
\end{aligned}$$

Remarque : Rappelons que la notation $X^{-1}(A)$ n'implique pas la bijectivité de X.

Proposition 19

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et X une variable aléatoire discrète sur cet espace.
Si $A \subset X(\Omega)$, alors $(X \in A)$ est un événement.

Preuve : Comme A est au plus dénombrable et

$$(X \in A) = \bigcup_{x \in A} (X = x) \in \mathcal{A}$$

comme réunion au plus dénombrable d'événements. □

Théorème 20

Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et X une variable aléatoire discrète sur cet espace.
La famille $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est alors un système complet d'événements.

On munit désormais l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ d'une probabilité $\mathbf{P}$.

Définition 21

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
On appelle loi de probabilité de X (ou plus simplement loi de X) l'application

$$\mathbb{P}_X : A \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \mapsto \mathbf{P}(X \in A)$$

Théorème 22

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
L'application $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Preuve : On vérifie que :
Pour tout $A \subset X(\Omega), \mathbf{P}_X(A) = \mathbf{P}(X \in A) \in [0,1]$.

$$\mathbf{P}_X(X(\Omega)) = \mathbf{P}(X \in X(\Omega)) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Pour toute suite (A_n) d'événements deux à deux incompatibles,

$$\mathbf{P}_X\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (X \in A_n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X \in A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_X(A_n)$$

□

Définition 23

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
La loi de X est entièrement déterminée par la distribution de probabilités $(\mathbf{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$, appelée distribution de probabilités de X.
On appelle support de la loi de X l'ensemble des éléments x de E tels que $\mathbf{P}(X = x) \neq 0$.

Étant donné une certaine distribution de probabilités $(p_x)_{x\in E}$ définie sur un ensemble E au plus dénombrable, il est toujours possible de définir une variable aléatoire X de loi donnée par $(p_x)_{x\in E}$.

Proposition 24

Soit $(p_x)_{x\in E}$ une distribution de probabilités définie sur un ensemble E au plus dénombrable.
Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire discrète X de loi donnée par $(p_x)_{x\in E}$.

Preuve : Considérons l'espace probabilisé $(E, \mathcal{P}(E), \mathbf{P})$ où $\mathbf{P}$ est définie par $\mathbf{P}(\{x\}) = p_x$.
En prenant $X = \mathrm{id}_E$, pour tout $x \in E, \mathbf{P}(X = x) = p_x$.

□

Rappelons quelques notations utiles :

Notation 25

Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes.

- Si une variable X suit une certaine loi de probabilité $\mathcal{L}$, on notera $X \sim \mathcal{L}$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{L}$.
- Si deux variables X et Y suivent une même loi de probabilité, on notera $X \sim Y$.

Remarque : Deux variables aléatoires X et Y suivent la même loi si, et seulement si, $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(Y = x)$$

Dans l'égalité en loi, on ne suppose pas que les variables X et Y sont définies sur le même univers. X et Y peuvent d'ailleurs être différentes.

Pour illustrer ces remarques, on considère les exemples suivants :

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Rademacher, c'est-à-dire que

$$\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$$

   Alors, $X \sim -X$.
2. On considère une pièce équilibrée qu'on lance n fois. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de pile et Y la variable aléatoire donnant le nombre de face.
   Alors X et Y suivent la même loi mais sont pourtant différentes.

Définition 26

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et un événement A telle que $\mathbb{P}[A] \neq 0$.
On appelle loi conditionnelle de X sachant A, la loi de X pour la probabilité $\mathbf{P}_A$, c'est-à-dire l'application :

$$\begin{cases} X(\Omega) \to [0, 1] \\ B \mapsto \mathbf{P}_A(X \in B) \end{cases}$$

Remarque : Il n'y a pas de notations officielles dans le programme, on peut noter cette dernière $\mathcal{L}(X \mid A)$.

11.3.1 Opérations sur les variables aléatoires discrètes

On considère une application $f : E \to F$ entre deux ensembles E et F non vides et d'une variable aléatoire discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans E.
On peut définir une nouvelle variable aléatoire $f \circ X$, traditionnellement notée $f(X)$. Vérifions que $f(X)$ une variable aléatoire.

Proposition 27

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E et $f : E \to F$ une application.
Alors, $f \circ X = f(X)$ est une variable aléatoire discrète.

Preuve : Posons $Y = f(X)$. Ainsi $Y(\Omega) = f(X(\Omega))$ est au plus dénombrable et :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad (Y = y) = \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} (X = x) \in \mathcal{A}$$

□

Proposition 28

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisable, X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E, $f : E \to F$ une application. Alors, la loi de $f(X)$ est entièrement déterminée par f et la loi de X et :

$$\forall A \subset f(X(\Omega)), \quad \mathbf{P}_{f(X)}(A) = \mathbf{P}(f(X) \in A) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) \in A}} \mathbf{P}(X = x)$$

Preuve : Soit $A \subset f(X(\Omega))$. Alors,

$$(f(X) \in A) = (f(X) \in A) \cap \Omega = (f(X) \in A) \cap \bigsqcup_{x \in X(\Omega)} (X = x) = \bigsqcup_{x \in X(\Omega)} (f(x) \in A) \cap (X = x) = \bigsqcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) \in A)}} (X = x)$$

□

Proposition 29

Soit X et X' deux variables aléatoires discrètes définies respectivement sur les espaces probabilisés $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $(\Omega', \mathcal{A}', P')$.
On suppose que $X(\Omega) = X'(\Omega')$ et que $X \sim X'$. Soit $f : X(\Omega) \to F$.
Les variables aléatoires discrètes $f(X)$ et $f(X')$ ont alors la même loi.

Preuve : Notons $Y = f(X)$ et $Y' = f(X')$. On remarque que

$$Y(\Omega) = f(X(\Omega)) = f(X'(\Omega')) = Y'(\Omega')$$

D'autre part pour tout $y \in Y(\Omega)$,

$$P(Y = y) = P\left(\bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} (X = x)\right) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} P(X = x) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} P(X' = x) = P(Y' = y)$$

On en déduit que $Y \sim Y'$. □

11.3.2 Couple de variables aléatoires et vecteur aléatoire

Définition 30

Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs respectivement dans E et F. Alors,

1. $(X, Y) : \Omega \to E \times F$ est une variable aléatoire discrète.
2. La loi de (X, Y) est appelée loi conjointe de X et Y.
3. Les lois de X et Y sont appelées lois marginales de (X, Y).

Preuve : Pour prouver que (X, Y) est une variable aléatoire, on remarque que pour tout $(x, y) \in (X, Y)(\Omega)$,

$$((X, Y) = (x, y)) = (X = x) \cap (Y = y) \in \mathcal{A}$$

□

Remarques :

- On a toujours l'inclusion : $(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. En général, $(X, Y)(\Omega) \neq X(\Omega) \times Y(\Omega)$
- On pourra utiliser indifféremment les notations suivantes : $(X = x) \cap (Y = y) = ((X, Y) = (x, y)) = (X = x, Y = y)$.
- Si on vous demande de donner la loi conjointe, il suffit de donner :
  1. $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
  2. Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = x, Y = y)$.

Proposition 31

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Alors :

1. la famille d'événements $([X = x] \cap [Y = y])_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ forme un système complet d'événements.
2. $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}[[X = x] \cap [Y = y]] = \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}[[X = x] \cap [Y = y]] = 1.$

Théorème 32

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $E \times F$. On peut retrouver les lois marginales à partir de la loi conjointe :

$$\forall x \in X(\Omega), P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P((X, Y) = (x, y))$$

$$\forall y \in Y(\Omega), P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P((X, Y) = (x, y))$$

Définition 33

Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
On appelle loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ avec $\mathbf{P}(Y = y) \neq 0$, la loi définie par :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}_{(Y=y)}((X = x)) = \frac{\mathbf{P}((X = x) \cap (Y = y))}{\mathbf{P}(Y = y)}$$

On définit de même la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ pour $\mathbf{P}(X = x) \neq 0$.

Remarque : La connaissance des lois conjointes (grâce notamment au contexte de l'exercice) et des lois marginales permettent de retrouver la loi conjointe.

11.3.3 Variables aléatoires indépendantes

Définition 34

Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont dites indépendantes si l'une des deux assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$.
2. Pour tout $(A, B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$.

On notera alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Preuve : Supposons que pour tous $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$.
Soit $(A, B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Alors, par sommabilité,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B) &= \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x) \cdot \sum_{y \in B} \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{(x,y) \in A \times B} \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y) \\ &= \sum_{(x,y) \in A \times B} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{(x,y) \in A \times B} (X = x, Y = y) \right) = \mathbb{P}(X \in A, Y \in B)\end{aligned}$$

La réciproque est s'obtient en considérant $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$. $\square$

Corollaire 35

Soit X et Y deux variables aléatoires sur$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et deux applications $f : X(\Omega) \to E$ et $g : Y(\Omega) \to F$.
Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Preuve : Soit $e \in E$ et $f \in F$. Calculons

$$\mathbb{P}(f(X) = e, g(Y) = f) = \mathbb{P}\left(X \in f^{-1}(\{e\}), Y \in g^{-1}(\{f\})\right)$$

Or X et Y sont indépendantes :

$$\mathbb{P}(f(X) = e, g(Y) = f) = \mathbb{P}\left(X \in f^{-1}(\{e\})\right) \cdot \mathbb{P}\left(Y \in g^{-1}(\{f\})\right) = \mathbb{P}(X = e) \cdot \mathbb{P}(Y = f)$$

$\square$

Définition 36 (Variables aléatoires mutuellement indépendantes)

Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Les variables sont dites (mutuellement) indépendantes si, et seulement si, l'une des deux assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$.
2. Pour tout $(A_1, \ldots, A_n) \subset X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 \in A_1), \ldots, (X_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants.

Remarque : la mutuelle indépendance implique l'indépendance deux à deux, par contre la réciproque est fausse.

Preuve : Soit $(A_1,\dots,A_n)\subset X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(X_i\in A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\sum_{x_i\in A_i}\mathbb{P}\left(X_i=x_i\right)&=\sum_{(x_1,\dots,x_n)\in A_1\times\cdots\times A_n}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(X_i=x_i\right)\\&=\sum_{(x_1,\dots,x_n)\in A_1\times\cdots\times A_n}\mathbb{P}\left(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n\right)=\mathbb{P}\left(X_1\in A_1,\dots,X_n\in A_n\right)\end{aligned}$$

Prouvons maintenant que toute partie I de $[\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}\left(X_i\in A_i\right)\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}\left(X_i\in A_i\right)$.

On pose pour cela $B_i=A_i$ si $i\in I$ et $B_i=X_i(\Omega)$ sinon. En adaptant la preuve précédente, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}\left(X_i\in A_i\right)\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left(X_i\in B_i\right)\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(X_i\in B_i\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}\left(X_i\in A_i\right)$$

□

Théorème 37 (Lemme des coalitions)

Soit $(X_1,\dots,X_n)$ des variables aléatoires discrètes indépendantes. Soit $k\in[\![1;n-1]\!]$ et

$$f:\prod_{i=1}^{k}X_i(\Omega)\to E\qquad g:\prod_{i=k+1}^{n}X_i(\Omega)\to F$$

Les variables $f\left(X_1,\dots,X_k\right)$ et $g\left(X_{k+1},\dots,X_n\right)$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes.

Preuve : L'idée est de montrer que $Y=(X_1,\dots,X_k)$ et $Z=(X_{k+1},\dots,X_n)$ sont des vecteurs aléatoires indépendants, d'utiliser le résultat précédent.

$$\text{Soit }\ (x_1,\dots,x_k)\in\prod_{i=1}^{k}X_i(\Omega)\ \text{ et }\ (x_{k+1},\dots,x_n)\in\prod_{i=k+1}^{n}X_i(\Omega),$$

$$(Y=(x_1,\dots,x_k))=\bigcap_{i=1}^{k}\left(X_i=x_i\right)\ \text{ et }\ (Z=(x_{k+1},\dots,x_n))=\bigcap_{i=k+1}^{n}\left(X_i=x_i\right).$$

On en déduit, d'après l'indépendance des variables X_i que

$$P\left((Y=(x_1,\dots,x_k))\cap(Z=(x_{k+1},\dots,x_n))\right)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left(X_i=x_i\right)\right)=\prod_{i=1}^{n}P\left(X_i=x_i\right)$$

De même

$$P\left(Y=(x_1,\dots,x_k)\right)\times P\left(Z=(x_{k+1},\dots,x_n)\right)=\prod_{i=1}^{k}P\left(X_i=x_i\right)\times\prod_{i=k+1}^{n}P\left(X_i=x_i\right)=\prod_{i=1}^{n}P\left(X_i=x_i\right).$$

On a bien montré que Y et Z étaient indépendantes. Il suffit alors d'utiliser le résultat précédent. □

Théorème 38 (Extension des coalitions)

Soit $(X_1,\dots,X_n)$ des variables aléatoires discrètes indépendantes.
Soit $r\geqslant 1$ et $1<a_2<\ldots<a_{r-1}<a_r<n$ et $f_1,\dots f_r$ sont des fonctions telles que pour tout $k\in[\![1;r]\!]$, f_k est définie sur $\displaystyle\prod_{i=a_k}^{a_{k+1}-1}X_k(\Omega)$.
Les variables aléatoires $f_1\left(X_1,\dots,X_{a_2-1}\right),f_2(X_{a_2},\dots,X_{a_3-1})\dots,f_r\left(X_{a_r},\dots,X_n\right)$ sont indépendantes.

Théorème 39 (Théorème d'extension de Kolmogorov)

Soit $(\mathcal{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de lois discrètes (c'est-à-dire des probabilités sur des ensembles E_n finis ou dénombrables munis de la tribu $\mathcal{P}(E_n)$).
Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ discrètes indépendantes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n \sim \mathcal{L}_n$$

Remarque : Ce théorème permet de justifier les énoncés des exercices / problèmes. Il est à priori utilisé de manière sous-entendue.

Exemple : On veut modéliser un jeu de pile ou face infini. Soit $p \in]0, 1[$. On se donne les lois de probabilités $\mathcal{L}_n$ toutes égales à la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$. Le théorème d'existence de Kolmogorov assure qu'il existe un espace probabilisé qui modélise cette expérience.

Exercice E12 : Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(\mathrm{X} = j, \mathrm{Y} = k) = \frac{a(j+k)}{2^{j+k}}$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X} = \mathrm{Y})$.

11.4 Lois usuelles

11.4.1 Loi géométrique

Définition 40

Soit $p \in]0,1[$. On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p si, et seulement si,

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}[X = k] = p(1-p)^{k-1} \end{cases}$$

On note alors $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Modèle 41

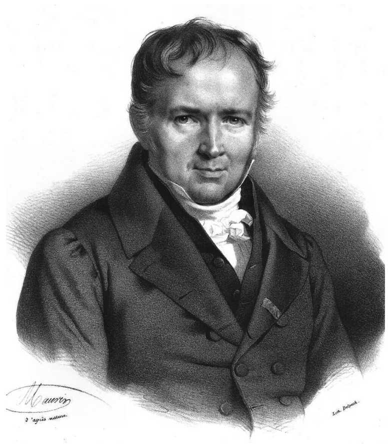
On lance plusieurs fois une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est égale à p jusqu'à obtenir un pile. Soit X la variable aléatoire donnant le $\boxed{\text{RANG}}$ d'obtention du premier pile. Alors $X \sim \mathcal{G}(p)$.
La loi géométrique est la loi du rang du premier succès.

Remarques :

1. On peut parfois ajouter $+\infty$ dans l'image de la loi et ajouter alors $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.
2. Il est souvent plus simple de travailler avec des inégalités. En effet pour $k \in \mathbb{N}$, $(X > k) =$ " les k premiers essais ont été des échecs". On a donc
$$\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$$
3. Ne pas mélanger la loi géométrique avec la loi binomiale. Dans les deux cas on s'intéresse à une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès mais pour la loi binomiale on regarde le nombre de succès lors d'un nombre donné d'épreuves alors que pour la loi géométrique on regarde le rang du premier succès.

11.4.2 Loi de Poisson

Siméon Denis Poisson (1781-1840) lost his father at fifteen, and was sent by his mother to study medicine in Paris to earn his living. Seeing patients die under his care, he decided (accidentally, having first chosen the wrong classroom!) to dedicate himself to mathematics. He was received first at the École Polytechnique at eighteen. Then honors came until the end of his life (he was even made a baron by Louis XVIII). In mathematics, his interests ranged over almost all of analysis : integration, Fourier series, probability, and, especially, mathematical physics, celestial mechanics and electrostatics in particular. A member of the Royal Council of Public Education, he tried to develop the teaching of mathematics.



"Life is good for only two things : doing mathematics and teaching it."

Définition 42

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ si, et seulement si,

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}[X = n] = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!} \end{cases}$$

On note alors $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarques :

1. La loi de Poisson était appelée loi des événements rares car on l'utilisait autrefois pour modéliser les événements rares comme les suicides d'enfants, les accidents dus aux coups de pied de cheval dans l'armée prussienne.
2. La loi de Poisson est utilisée en télécommunication (phénomène de file d'attente), en physique pour décrire des phénomènes de désintégration radioactive ou encore en biologie pour décrire les phénomènes de mutation...

Exercice C13 : [CCINP] Soient $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
1. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$. En déduire $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.
2. Déterminer la loi de $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$.
3. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{Z} > n)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{Z} > \mathrm{X}+\mathrm{Y})$.

Exercice C14 : [Mines-Télécom]
Une urne contient initialement une boule blanche. On effectue un ou plusieurs lancers indépendants d'une pièce équilibrée :
- si on obtient pile, on ajoute une boule noire et on lance à nouveau la pièce
- si on obtient face, on tire une boule de l'urne et l'expérience s'arrête.

On note X le numéro du lancer auquel on arrête l'expérience.
1. Déterminer la loi de X.
2. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Exercice C15 : [CCINP]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note A l'évènement « X est un nombre pair » et B l'évènement « X est un nombre impair ».
Déterminer et comparer les valeurs de $\mathrm{P}(A)$ et $\mathrm{P}(B)$.

Exercice C16 : [ICNA]
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur cet espace et suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $Y(\omega) = \frac{X(\omega)}{2}$ si $X(\omega)$ est pair et $Y(\omega) = \frac{X(\omega)+1}{2}$ si $X(\omega)$ est impair.
Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

11.5 Calcul de la probabilité d'un événement

Nous exposons ci-dessous une méthode générale pour calculer la probabilité d'un événement.

Meth 43

Un énoncé de probabilités débute en général par un protocole expérimental qu'il faut soigneusement comprendre. On vous demande alors de calculer la probabilité d'un événement que l'on notera A.

1. Certains énoncés exigent du candidat de l'initiative. C'est ainsi à vous d'introduire les événements élémentaires décrits par le protocole expérimental et de trouver une notation adaptée et intuitive. Lorsque ces événements élémentaires sont répétés, introduire une indexation des événements précédents (sous formes de indices).
2. Il s'agit en second lieu de décrire l'événement A à l'aide d'une phrase en français qui donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'événement A se réalise :

   "l'événement A se réalise si, et seulement si, ... "

   Le but est de décrire A à l'aide des événements élémentaires introduits précédemment.
3. Grâce à l'équivalence précédente, on peut désormais formaliser mathématiquement l'événement A. On écrira une égalité ensembliste où A sera décrit à l'aide des événements élémentaires. On utilisera les opérations ensemblistes : union, intersection, complémentaires d'événements élémentaires, mais JAMAIS des opérations d'additions ou de multiplications. On utilisera le dictionnaire ci-dessous :

Égalité ensembliste	Description en français
$A = B \cup C$	A se réalise si, et seulement si, B se réalise ou C se réalise
$A = B \cap C$	A se réalise si, et seulement si, B se réalise et C se réalise
$A = \overline{B}$	A se réalise si, et seulement si, B ne se réalise pas
$A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$	A se réalise si, et seulement si, il existe $i \in I$ tel que A_i se réalise si, et seulement si, un des A_i se réalise
$A = \bigcap\limits_{i \in I} A_i$	A se réalise si, et seulement si, pour tout $i \in I$, A_i se réalise si, et seulement si, tous les A_i se réalisent

4. On peut enfin calculer la probabilité $\mathbb{P}[A]$ grâce à la décomposition ensembliste précédente en utilisant les règles de calcul décrites par la fiche méthode précédente(probabilités d'une union, d'une intersection, d'un complémentaire...). On exprimera $\mathbb{P}[A]$ en fonction des probabilités d'événements élémentaires. On pourra utiliser des additions et des multiplications à ce stade.

Remarques :

1. Dans le dictionnaire précédent, nous avons utiliser la traduction pratique :

$$\bigcup_{i \in I} \quad \longleftrightarrow \quad \exists\, i \in I$$

$$\bigcap_{i \in I} \quad \longleftrightarrow \quad \forall\, i \in I$$

2. Le dictionnaire peux contenir deux autres lignes qu'il faut bien comprendre :

Égalité ensembliste	Description en français
$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geqslant n} A_k$	A se réalise si, et seulement si, tous les A_k se réalisent à partir d'un certain rang.
$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geqslant n} A_k$	A se réalise si, et seulement si, une infinité de A_k se réalisent.

11.6 Fiches méthodes : règles de calculs en probabilités

Calcul de $\mathbb{P}[A]$

- intersection : $A = \bigcap_{i \in I} B_i$
  - $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$
    - Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quelconque : $\mathbb{P}[A] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[\bigcap_{k=0}^{n} B_k\right]$
    - Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, le théorème de la limite monotone donne :
    - $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}[B_n]$
  - $A = B_1 \cap \cdots \cap B_n$
    - $B_1, \ldots, B_n$ sont mutuellement indépendants
    - $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B_1] \times \cdots \times \mathbb{P}[B_n]$.
  - $A = B_1 \cap \cdots \cap B_n$
    - $\overline{B_1}, \ldots, \overline{B_n}$ sont deux à deux incompatibles
    - $\mathbb{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = 1 - \mathbb{P}[\overline{B_1} \cup \cdots \cup \overline{B_n}] = 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}[B_k]$
  - $A = B_1 \cap \cdots \cap B_n$
    - $B_1, \ldots, B_n$ sont non indépendants mais chronologiques
    - Formule des probabilités composées
    - $\mathbb{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(B_n)$
- $A = \overline{B}$
  - $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - \mathbb{P}(B)$
- union : $A = \bigcup_{i \in I} B_i$
  - $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$
    - Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quelconque : $\mathbb{P}[A] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right]$
    - Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, le théorème de la limite monotone donne :
    - $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}[B_n]$
  - $A = \bigcup_{i \in I} B_i$
    - $(B_i)_{i\in I}$ sont deux à deux incompatibles
    - $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{i\in I} B_i\right] = \sum_{i\in I} \mathbb{P}[B_i]$
  - $A = B_1 \cup \cdots \cup B_n$
    - $B_1, \ldots, B_n$ sont mutuellement indépendants
    - Ainsi $\overline{B_1}, \ldots, \overline{B_n}$ sont mutuellement indépendants
    - $\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n} \overline{B_i}\right] = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(B_i))$
  - $A = B_1 \cup \cdots \cup B_n$
    - Cas général
    - Formule du crible de Poincaré pour $n = 2$ ou $n = 3$
    - $\mathbb{P}(B_1 \cup \cdots \cup B_n) = \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_k}\right)\right]$