Chapitre 12

Ensembles dénombrables

Sommaire

12.1 Généralités et exemples

Définition 1 (Ensemble dénombrable)

Soit E un ensemble. On dit que E est dénombrable si, et seulement si, il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to E$.

Remarques :

1. L'application φ permet d'énumérer (de "dénombrer") les éléments de E puisque :
$$E = \mathsf{Im}(\varphi) = \{x_n = \varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
2. Soit E un ensemble dénombrable. Soit F un ensemble. S'il existe une bijection de E dans F, alors F est aussi un ensemble dénombrable.
3. Un ensemble dénombrable est infini.

Exemples :

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ est dénombrable puisque $\mathsf{Id}_{\mathbb{N}}$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans lui-même.
2. L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est dénombrable. Il suffit de considérer le "shift" (décalage) :
$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$$
qui est bijective.
3. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable. On peut "numéroter" les entiers relatifs de la manière suivante :

n	0	1	2	3	4	5	6	...
$\varphi(n)$	0	-1	1	-2	2	-3	3	...

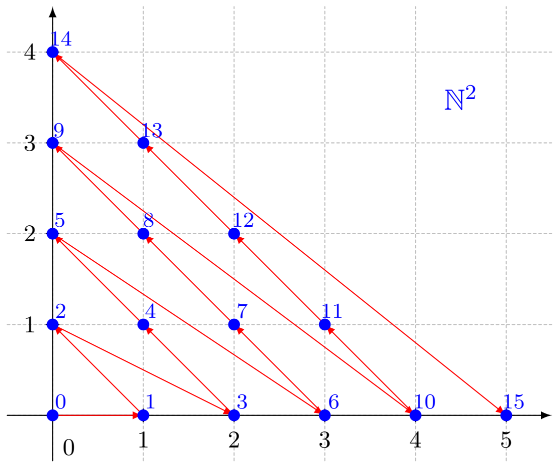
L'application :
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \to & \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array} \right.$$

est bijective et :

$$\varphi^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ p & \to & \begin{cases} 2p & \text{si } n \text{ est positif} \\ -2p-1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

4. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. Il suffit de considérer la bijection

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y \end{array} \right.$$



Exercice E1 : [Autre preuve du fait que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable]

1. Trouver une bijection très simple entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.
3. On considère l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N}^* \\ (p,q) & \mapsto & 2^p(2q+1) \end{array} \right.$

   Montrer que φ est une bijection.
4. En déduire une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, puis que $\mathbb{N}^2$ est bien dénombrable.

Théorème 2

Toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou dénombrable.

Preuve : Soit X une partie de $\mathbb{N}$.
Premier cas : Si X est majorée. Soit N un majorant de X. On a alors l'inclusion : $X \subset [\![0, N]\!]$. On en déduit que l'ensemble X est finie.

Deuxième cas : Si X est non majorée Considérons l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \to & X \\ 0 & \mapsto & \varphi(0) = \min(X) \\ 1 & \mapsto & \varphi(1) = \min(X \setminus \{\varphi(0)\}) \\ 2 & \mapsto & \varphi(2) = \min(X \setminus \{\varphi(0), \varphi(1)\}) \\ \vdots & & \\ n & \mapsto & \varphi(n) = \min(X \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\}) \end{array} \right.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, prouvons que $\varphi(n)$ est bien définie.
En effet, X est infini et $\{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\}$ est fini. Ainsi $X \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\}$ est bien une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un minimum.
Remarquons que l'application φ est strictement croissante. Elle est donc injective.
Montrons que φ est bien surjective. Soit $x \in X$. Remarquons qu'en prenant :

$$n = \mathsf{card}\{k \in X \mid k < x\} \in \mathbb{N}$$

on a bien :

$$x = \varphi(n).$$

En conclusion, $\varphi : \mathbb{N} \to X$ est bijective. Donc X est dénombrable.

□

Théorème 3

Soit E un ensemble.
S'il existe une injection $\phi : E \to \mathbb{N}$ alors l'ensemble E est fini ou dénombrable.
On dit que E est au plus dénombrable.

Preuve :
Soit $\phi : E \to \mathbb{N}$ une injection. Alors $\tilde{\phi} : E \to \phi(E)$ est bijective.
En tant que partie de $\mathbb{N}$, $\phi(E)$ est finie ou dénombrable.
Ainsi E est fini ou dénombrable.

□

12.2 Opérations sur les ensembles dénombrables

Théorème 4

Toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

Preuve : Soit E un ensemble dénombrable. Par définition, il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to E$.
Notons $\psi : E \to \mathbb{N}$ la bijection réciproque de φ
Soit F une partie de E, l'application :

$$\widetilde{\psi} : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \psi(n) \end{array} \right.$$

est injective.

On en déduit que F est au plus dénombrable. □

Théorème 5

Un produit cartésien FINI d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

Preuve : Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $E_1, \dots, E_r$ des ensembles au plus dénombrables.
Par définition, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, il existe une bijection $\psi_i : E_i \to \mathbb{N}$.
Considérons des nombres premiers $p_1, \dots, p_r$ fixés et l'application :

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 \times \cdots \times E_r & \to & \mathbb{N} \\ (x_1, \dots, x_r) & \mapsto & p_1^{\psi_1(x_1)} \dots p_r^{\psi_r(x_r)} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\psi_i(x_i)} \end{array} \right.$$

Vérifions que Ψ est injective.
Soit $(x_1, \dots, x_r) \in E_1 \times \cdots \times E_r$ et $(y_1, \dots, y_r) \in E_1 \times \cdots \times E_r$ tels que :

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, \dots, x_r) = \Psi(y_1, \dots, y_r) \quad & \iff \quad \prod_{i=1}^{r} p_i^{\psi_i(x_i)} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\psi_i(y_i)} \\ & \iff \quad \forall i \in [\![1, r]\!], \quad \psi_i(x_i) = \psi_i(y_i) \quad \text{(Unicité de la décomposition en facteurs premiers)} \\ & \iff \quad \forall i \in [\![1, r]\!], \quad x_i = y_i \quad \text{(car chaque } \psi_i \text{ est injective)} \\ & \iff \quad (x_1, \dots, x_r) = (y_1, \dots, y_r). \end{aligned}$$

Ainsi Ψ est injective. On en déduit que $E_1 \times \cdots \times E_r$ est au plus dénombrable.

□

Exemples :

1. On retrouve le fait que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
2. L'ensemble $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable. Plus généralement, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^r$ et $\mathbb{Z}^p$ sont dénombrables.

3. Tout nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ s'écrit de manière unique sous forme d'une fraction irréductible :

$$r = \frac{p}{q} \quad \text{avec } (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad p \wedge q = 1.$$

Considérons :

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \\ r & \mapsto & (p,q) \end{array} \right.$$

L'application Ψ est injective.
Or $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable en tant que produit cartésien d'ensembles dénombrables. Il existe une bijection $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$.
Ainsi l'application $f \circ \Psi : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ est une injection (en tant que composée de deux injections).
On en déduit que $\mathbb{Q}$ est au plus dénombrable. Comme $\mathbb{Q}$ est un ensemble infini, $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Théorème 6

Soit I un ensemble au plus dénombrable. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles au plus dénombrables indicées par I.
Alors l'union $\bigcup_{i \in I} E_i$ est au plus dénombrable.
On dit qu'une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est encore au plus dénombrable.

Preuve : Pour tout $i \in I$, on considère des injections $\varphi_i : E_i \to \mathbf{N}$ et une injection $\psi : I \to \mathbf{N}$. On pose $E = \bigcup_{i \in I} E_i$. Pour tout x de E on note

$$i_x = \min \left\{ i \in \mathrm{N} \mid x \in E_{\psi(i)} \right\}$$

Introduisons :

$$\Phi : \quad \begin{array}{l} E \to \mathrm{N}^2 \\ x \mapsto (i_x, \varphi_{i_x}(x)) \end{array}$$

L'application Φ est injective. En composant avec une injection de N^2 dans N, on en déduit que E est au plus dénombrable. $\square$

Corollaire 7

1. On retrouve que l'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable puisque $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$.
2. On retrouve que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dénombrable puisque $\mathbb{Q} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p}\mathbb{Z}$.

Exercice E2 :

1. Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On dit que α est un nombre algébrique si, et seulement si, il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ non nul tel que $P(\alpha) = 0$. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Attention

Un produit cartésien dénombrable d'ensembles au plus dénombrables n'est pas nécessairement dénombrable.

Théorème 8 (Cantor)

L'ensemble $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Preuve : Rappelons que l'ensemble E est l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$.
Raisonnons par l'absurde en supposant E est dénombrable. Il existe ainsi une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to E$.
Pour obtenir une contradiction, construisons une suite de E qui n'appartient pas à $\varphi(\mathbb{N})$ en utilisant l'extraction diagonale de Cantor.
Considérons la suite $(u_n) \in E$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 - \varphi(n)_n$$

On vérifie que la suite (u_n) n'appartient pas $\varphi(\mathbb{N})$. Ce qui contredit la surjectivité de φ.
L'ensemble E ne peut être dénombrable.
Prenons un exemple pour mieux comprendre ce procédé d'extraction diagonale :

n	$\varphi(n)$	u_n
0	$(0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, \dots)$	1
1	$(0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, \dots)$	0
2	$(0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, \dots)$	0
3	$(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$	0
4	$(0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$	1
5	$(0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, \dots)$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\square$

Théorème 9

L'ensemble $[0, 1[$ n'est pas dénombrable.

Preuve : Raisonnons par l'absurde en supposant que l'ensemble $[0, 1[$ est dénombrable. Ainsi, il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to [0, 1[$. Ainsi $\mathsf{Im}(\varphi) = \{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = [0, 1[$.
Or pour tout $n \in \mathbb{R}$, le réel $\varphi(n)$ de $[0, 1[$ admet un développement décimal propre de la forme :

$$\varphi(n) = 0, d_{1,n} d_{2,n} d_{3,n} d_{4,n} d_{5,n} \dots$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $d_{k,n}$ sont les décimales de $\varphi(n)$, c'est-à-dire des entiers de $[\![0, 9]\!]$ et la suite $(d_{k,n})_{k \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas égale à 9 à partir d'un certain rang.
Pour obtenir une contradiction, nous allons mettre en évidence un réel x de $[0, 1[$ qui ne peut être égal à l'un des $\varphi(n)$ à l'aide du procédé d'extraction diagonale de Cantor :
On choisit les décimales de $x = 0, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \dots$ de telle sorte que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad c_k \in [\![0, 8]\!] \quad \text{et} \quad c_k \neq d_{k,k}.$$

n	$\varphi(n)$	décimales de x
1	$0, d_{1,1} d_{2,1} d_{3,1} d_{4,1} d_{5,1} \dots$	$c_1 \in [\![0, 8]\!] \setminus d_{1,1}$
2	$0, d_{1,2} d_{2,2} d_{3,2} d_{4,2} d_{5,2} \dots$	$c_2 \in [\![0, 8]\!] \setminus d_{2,2}$
3	$0, d_{1,3} d_{2,3} d_{3,3} d_{4,3} d_{5,3} \dots$	$c_3 \in [\![0, 8]\!] \setminus d_{3,3}$
4	$0, d_{1,4} d_{2,4} d_{3,4} d_{4,4} d_{5,4} \dots$	$c_4 \in [\![0, 8]\!] \setminus d_{4,4}$
5	$0, d_{1,5} d_{2,5} d_{3,5} d_{4,5} d_{5,5} \dots$	$c_5 \in [\![0, 8]\!] \setminus d_{5,5}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

n	$\varphi(n)$	décimales de x
1	$0, 15698 \dots$	$c_1 = 2$
2	$0, 26988 \dots$	$c_2 = 3$
3	$0, 89245 \dots$	$c_3 = 7$
4	$0, 25569 \dots$	$c_4 = 8$
5	$0, 79985 \dots$	$c_5 = 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\begin{array}{ccl} x & = & 0, 23781 \dots \\ x & \neq & \varphi(1) \\ x & \neq & \varphi(2) \\ x & \neq & \varphi(3) \\ x & \neq & \varphi(4) \\ x & \neq & \varphi(5) \\ & \vdots & \end{array}$$

Cette construction de x prouve par unicité du développement décimal propre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x \neq \varphi(n).$$

Donc $x \notin \mathsf{Im}(\varphi) = [0, 1[$ et pourtant $x \in [0, 1[$, ce qui est contradictoire.
En conclusion, l'ensemble $[0, 1[$ n'est pas dénombrable.

$\square$

Théorème 10

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
2. Tout intervalle non vide et non réduit à un singleton est non dénombrable.

Preuve :

1. Comme $[0,1[\subset \mathbb{R}$ et que $[0,1[$ est non dénombrable. Donc $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
2. La fonction $\text{Arctan} : \mathbb{R} \to]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une bijection. On en déduit que l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est non dénombrable.
   Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Considérons l'application :
   $$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl}]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to &]a, b[\\ x & \mapsto & \alpha x + \beta \end{array} \right.$$
   où α et β sont choisis de telle sorte que :
   $$\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\alpha\frac{\pi}{2} + \beta = a \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\alpha\frac{\pi}{2} + \beta = b$$
   L'application φ est une bijection. On en déduit que l'intervalle $]a, b[$ est non dénombrable. Remarquons que les inclusions suivantes :
   $$\begin{cases}]a,b[\subset]a,b] \\ ]a,b[\subset [a,b] \\ ]a,b[\subset [a,b[\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}]a,b[\subset]-\infty,b] \\ ]a,b[\subset]-\infty,b[\\ ]a,b[\subset]a,+\infty[\\ ]a,b[\subset [a,+\infty[\end{cases}$$
   En conclusion, les intervalles $]a, b[, [a, b], [a, b[,]a, b], [a, +\infty[,]a, +\infty[,] - \infty, b],] - \infty, b[$ et $\mathbb{R}$ sont non dénombrables.
   Tout intervalle non vide et non réduit à un singleton est non dénombrable.

□

12.3 Pour aller plus loin

Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sont infinis, mais sont-ils de la même "taille" ?
On vient de voir que $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ étaient des ensembles dénombrables car ils peuvent être mis en bijection avec $\mathbb{N}$.
Par convention, le cardinal des ensembles dénombrables est noté $\aleph_0$ (lire aleph 0 ou aleph qui est la première lettre de l'alphabet hébreu).
Aussi surprenant que cela puisse paraître au premier abord $\mathbb{N}^2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ont donc la même taille que $\mathbb{N}$.
Nous avons vu par contre que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Or $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. On peut ainsi affirmer que l'infinité de $\mathbb{R}$ est "plus grande" que celle de $\mathbb{N}$.
On a vu dans le cours sur le dénombrement que si E est un ensemble fini de cardinal n, alors l'ensemble des parties de E est un ensemble de cardinal 2^n.
On peut montrer par ailleurs que $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$. Par analogie, le cardinal de $\mathbb{R}$ est noté $2^{\aleph_0}$. On a ainsi :
$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$$
Le cardinal qui suit immédiatement $\aleph_0$ est noté $\aleph_1$, on peut le définir dans le cadre de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (ZF). L'hypothèse du continue affirme que :

Conjecture 11 (Hypothèse du continue)

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

En d'autres termes, il n'existe pas d'ensemble dont le cardinal est compris strictement entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$.

Histoire : Cette hypothèse a été énoncée la première fois par le mathématicien Georg Cantor. Elle constituait le premier de la célèbre liste des 23 problèmes de Hilbert. Cette liste avait été établie par le célèbre mathématicien David Hilbert pour le congrès international des mathématiciens de 1900 à Paris. Le but de cette liste était de guider la recherche en mathématiques du siècle alors naissant. □

Théorème 12 (de Cantor)

Soit E un ensemble. Il n'existe pas de surjection (et donc pas de bijection) de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Indication : On raisonnera par l'absurde en supposant qu'il existe une surjection $f : E \to \mathcal{P}(E)$ et on considèrera
$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

□

Exercice E3 : Montrer qu'il n'existe pas d'application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice E4 : Soit A un ensemble. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

1. A est dénombrable ;
2. il existe une injection de A dans un ensemble dénombrable ;
3. il existe une surjection d'un ensemble dénombrable sur A.

Exercice E5 :
Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
Que dire de l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$?

Exercice E6 : Soit X un ensemble non dénombrable de réels positifs. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la série $\sum x_n$ diverge.

Exercice E7 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$. Montrer que si les A_i sont deux à deux disjoints, alors I est au plus dénombrable.
2. Montrer que f admet une limite à droite et une limite à gauche en tout point. On note pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$
$$f(x_0)^+ = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ et } f(x_0)^- = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$
3. Montrer que $f(x_0)^- \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0)^+$pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
4. Déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.