

Chapitre 43

Familles sommables

Sommaire

44.1 Familles sommables de nombres positifs	1
44.1.1 Généralités	1
44.1.2 Regroupements par paquets	3
44.2 Familles sommables de nombres complexes	6
44.2.1 Regroupement par paquets	7
44.2.2 Propriétés	8
44.3 Permutation des termes d'une série numérique	12
44.4 Applications aux séries doubles	13
44.4.1 Exemples	13
44.4.2 Généralités	15
44.4.3 Produit de Cauchy	17

L'ensemble I désignera dans ce chapitre un ensemble.

43.1 Familles sommables de nombres positifs

43.1.1 Généralités

Définition 1

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels dans $[0, +\infty]$ indexée par I .

On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, l'ensemble :

$$\left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\}$$

est majoré.

Dans ce cas, la somme de la famille, notée $\sum_{i \in I} u_i$ est le réel :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ fini}}} \sum_{i \in J} u_i.$$

Dans le cas où la famille $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, on pose :

$$\sum_{i \in I} u_i = +\infty.$$

Remarques :

1. Dans le cas où I est un ensemble fini, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable et la notation $\sum_{i \in I} u_i$ désigne à nouveau la somme des termes de la famille finie $(u_i)_{i \in I}$.

2. Rappelons la notion de famille presque nulle ou à support fini (rencontrée dans le chapitre sur les espaces vectoriels). On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ est presque nulle si, et seulement si, son support $S = \{i \in I \mid u_i \neq 0\}$ est fini. Montrons que cette famille est sommable.

Soit J une partie finie de I , on a l'inégalité :

$$\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in J \cup S} u_i = \underbrace{\sum_{i \in S} u_i}_{=M}.$$

L'ensemble $\left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\}$ est majoré par M (et atteint M).

Par définition, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable et :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in S} u_i.$$

Proposition 2

Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs indexée par I .

On suppose que :

1. Pour tout $i \in I$, $u_i \leq v_i$.
2. La famille $(v_i)_{i \in I}$ est sommable.

Alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable et :

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i.$$

Preuve : Supposons que la famille $(v_i)_{i \in I}$ est sommable. On sait alors que $\left\{ \sum_{i \in J} v_i \mid J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\}$ est majoré par $M = \sum_{i \in I} v_i$.

Montrons que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable. Soit J une partie finie de I . Comme pour tout $i \in I$, $u_i \leq v_i$, on en déduit que :

$$\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in J} v_i \leq M = \sum_{i \in I} v_i.$$

Par conséquent, l'ensemble $\left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\}$ est majoré par $M = \sum_{i \in I} v_i$. Ainsi la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable et :

$$\sum_{i \in I} u_i \leq M = \sum_{i \in I} v_i.$$

□

Théorème 3 (Cas où $I = \mathbb{N}$)

Soit $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de réels POSITIFS indexée par $\mathbb{N}$ (c'est -à-dire une suite à valeurs positives).

La famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série numérique $\sum_{i \geq 0} u_i$ est convergente.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i.$$

Preuve : Montrons l'implication directe. Supposons que la famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble $J_n = \llbracket 0, n \rrbracket$ qui est bien une partie finie de $\mathbb{N}$, on sait que :

$$\sum_{i \in J_n} u_i \leq \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i}_{=M}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^n u_i \leq M.$$

Le théorème fondamental sur les séries positifs assure que la série numérique $\sum_{i \geq 0} u_i$ est convergente et :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} u_i = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=0}^n u_i \right\} \leq M = \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i \quad (1)$$

Réciproquement, supposons que la série $\sum_{i \geq 0} u_i$ est convergente. Montrons que la famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable. Soit J une partie finie de $\mathbb{N}$. Il existe donc un entier $n_J \in \mathbb{N}$ tel que $J \subset \llbracket 0, n_J \rrbracket$. On en déduit que :

$$\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in \llbracket 0, n_J \rrbracket} u_i = \sum_{i=0}^{n_J} u_i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} u_i.$$

La dernière inégalité provient du théorème fondamental des séries positives.

L'ensemble $\left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset \mathbb{N} \text{ et } J \text{ fini} \right\}$ est majoré par $\sum_{i=0}^{+\infty} u_i$. Par conséquent, la famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable et :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} u_i \quad (2)$$

Dans ce cas, les deux inégalités (1) et (2) donne par antisymétrie :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i.$$

□

43.1.2 Regroupements par paquets

Théorème 4

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels POSITIFS indexée par I .

Soit (I_1, I_2) une partition de I .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.
2. Les familles $(u_i)_{i \in I_1}$ et $(u_i)_{i \in I_2}$ sont sommables.

Dans ce cas :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I_1} u_i + \sum_{i \in I_2} u_i.$$

Preuve : Montrons que (1) $\implies$ (2). Supposons que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable. Montrons que les familles $(u_i)_{i \in I_1}$ et $(u_i)_{i \in I_2}$ sont sommables.

Soit J_1 une partie finie de I_1 . Remarquons que $J_1 \subset I_1 \subset I$. Ainsi J_1 est une partie finie de I , on a donc :

$$\sum_{i \in J_1} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i.$$

L'ensemble $\left\{ \sum_{i \in J_1} u_i \mid J_1 \subset I_1 \text{ et } J_1 \text{ fini} \right\}$ est majoré par $\sum_{i \in I} u_i$.

On en déduit que la famille $(u_i)_{i \in I_1}$ est sommable.

Un raisonnement similaire permet de prouver que la famille $(u_i)_{i \in I_2}$ est sommable.

Montrons que $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I_1} u_i + \sum_{i \in I_2} u_i$.

Soit J_1 une partie finie de I_1 . Soit J_2 une partie finie de I_2 . Comme $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, on a : $J_1 \cap J_2 = \emptyset$. Or $J_1 \sqcup J_2$ est une partie finie de I , ainsi :

$$\sum_{i \in J_1 \sqcup J_2} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$$

$$\sum_{i \in J_1} u_i + \sum_{i \in J_2} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i.$$

$$\sum_{i \in J_1} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in J_2} u_i$$

Cette majoration est valable pour toute partie finie J_1 de I_1 , on en déduit que :

$$\sum_{i \in I_1} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in J_2} u_i$$

$$\sum_{i \in J_2} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in I_1} u_i$$

Cette majoration est aussi valable pour toute partie finie J_2 de I_2 , ainsi :

$$\sum_{i \in I_2} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in I_1} u_i$$

En conclusion :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I_1} u_i + \sum_{i \in I_2} u_i.$$

Réciproquement, montrons que (2) $\implies$ (1). Supposons que les familles $(u_i)_{i \in I_1}$ et $(u_i)_{i \in I_2}$ sont sommables. Montrons que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

Soit J une partie finie de I . Comme $I = I_1 \sqcup I_2$. On en déduit que $J = J \cap I = (J \cap I_1) \sqcup (J \cap I_2)$. On remarque que $J \cap I_1$ est une partie finie de I_1 et $J \cap I_2$ est une partie finie de I_2 . On a ainsi :

$$\sum_{i \in J} u_i = \sum_{i \in (J \cap I_1) \sqcup (J \cap I_2)} u_i = \sum_{i \in J \cap I_1} u_i + \sum_{i \in J \cap I_2} u_i \leq \sum_{i \in I_1} u_i + \sum_{i \in I_2} u_i.$$

L'ensemble $\left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\}$ est majoré par $\sum_{i \in I_1} u_i + \sum_{i \in I_2} u_i$

On en déduit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable et :

$$\sum_{i \in I_1} u_i + \sum_{i \in I_2} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i.$$

On obtient l'égalité :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I_1} u_i + \sum_{i \in I_2} u_i.$$

□

Plus généralement :

Théorème 5

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels POSITIFS indexée par I .

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $(I_1, \dots, I_N)$ une partition de I .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.
2. Les familles $(u_i)_{i \in I_1}, \dots, (u_i)_{i \in I_N}$ sont sommables.

Dans ce cas :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I_1} u_i + \dots + \sum_{i \in I_N} u_i = \sum_{n=1}^N \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right).$$

Exemple : Considérons une famille $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de réels positifs.

Comme $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \sqcup \mathbb{Z}_*^-$. La famille $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est sommable si, et seulement si, les familles $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}_*^-}$ sont sommables si, et seulement si, les familles $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(u_{-i})_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont sommables.

Dans ce cas :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} u_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i + \sum_{i \in \mathbb{N}^*} u_{-i}.$$

Théorème 6 (de Fubini)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels POSITIFS indexée par I .

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.
2. (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable.
(b) La série numérique $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$ est convergente.

Dans ce cas :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right).$$

Remarque : Dans le cas où la famille $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, l'égalité :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right) = +\infty$$

reste en fait vraie avec la convention que la somme vaut $+\infty$.

Méthode 7

Dans le cas où $I = \mathbb{N}^2$ ou $I = \mathbb{Z}^2$, les partitions les plus souvent utilisées sont les suivantes :

partition suivant	$\mathbb{N}^2$	$\mathbb{Z}^2$
les lignes	$L_i = \{(j, i) \mid j \in \mathbb{N}\}$	$L_i = \{(j, i) \mid j \in \mathbb{Z}\}$
les colonnes	$C_j = \{(i, j) \mid i \in \mathbb{N}\}$	$C_j = \{(i, j) \mid i \in \mathbb{Z}\}$
les diagonales	$D_k = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j = k\}$	$D_k = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid i + j = k\}$

On peut généraliser facilement au cas de $(\mathbb{N}^*)^2$ et $(\mathbb{Z}^*)^2$.

Exemple :

Exercice E1 :

1. Montrer rapidement que $\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{2^n(2k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$
2. Soit $x \in [0, 1[$. Montrer l'égalité :

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

Indication : On étudiera la famille $(x^p)_{p \in \mathbb{N}^*}$.

□

Exercice E2 : Soit $(u_{p,q})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ définie par :

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad u_{p,q} = \frac{1}{(p+q)^\alpha}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable.

43.2 Familles sommables de nombres complexes

Nous allons désormais nous intéresser à des familles de complexes indexée par un ensemble. Nous étudierons tout d'abord le cas réel, puis le cas complexe.

Définition 8

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I .

On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable, ce qui revient à dire que l'ensemble :

$$\left\{ \sum_{i \in J} |u_i| \mid J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\}$$

est majoré.

Afin de définir la somme d'une famille sommable de réels, rappelons :

Définition 9

Soit $x \in \mathbb{R}$,

1. La partie positive de x est le réel positif noté x^+ définie par $x^+ = \max(x, 0) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
2. La partie négative de x est le réel positif noté x^- définie par $x^- = \max(-x, 0) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.



Attention

Malgré son nom, la partie négative d'un réel est un nombre positif!!!

Théorème 10

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a les égalités suivantes : $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Proposition 11

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels indexée par I .

Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors les familles $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ sont sommables.

On pose alors :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$$

Proposition 12

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I .

Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors les familles $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$ sont sommables.

On pose alors :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i).$$

43.2.1 Regroupement par paquets**Théorème 13** (de Fubini)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de complexes indexée par I .

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.
2. (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable.
 (b) La série numérique $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \in I_n} |u_i| \right)$ est convergente.

Dans ce cas :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right).$$

Preuve : Admis

□

Corollaire 14

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de complexes indexée par I . Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ une bijection.

Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_{\varphi(n)}$ converge absolument et :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$$

Preuve : Remarquons que comme $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ est bijective, on a $\varphi(\mathbb{N}) = I$. Ainsi :

$$I = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\{\varphi(n)\}}_{=I_n}$$

La famille $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une partition de I . En appliquant le théorème de Fubini à cette partition, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \in \{\varphi(n)\}} |u_i| \right) =$

$\sum_{n \geq 0} |u_{\varphi(n)}|$ converge et :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in \{\varphi(n)\}} u_i \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}.$$

□

43.2.2 Propriétés

Comme dans le théorème 3, nous avons dans le cas où $I = \mathbb{N}$ le lien entre série numérique absolument convergente et famille sommable :

Théorème 15

Soit $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de complexes indexée par $\mathbb{N}$ (c'est -à-dire une suite à valeurs positives).

La famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série numérique $\sum_{i \geq 0} u_i$ est absolument convergente.

Dans ce cas :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i.$$

Preuve : Soit $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de complexes sommable. Raisonnons par équivalences :

La famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(|u_i|)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable (par définition)
 si, et seulement si, la série numérique $\sum_{i \geq 0} |u_i|$ est convergente (théorème 3)
 si, et seulement si, la série numérique $\sum_{i \geq 0} u_i$ est absolument convergente.

Vérifions que la somme de la famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ coïncide bien avec la somme de la série numérique $\sum_{i=0}^{+\infty} u_i$.

Premier cas : Si la famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est à valeurs réelles et sommable :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} u_i &= \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^- = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i^+ - \sum_{i=0}^{+\infty} u_i^- \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} (u_i^+ - u_i^-) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} u_i. \end{aligned}$$

Deuxième cas : Si la famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est à valeurs complexes et sommable :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} u_i &= \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_i) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} (\operatorname{Re}(u_i) + i \operatorname{Im}(u_i)) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} u_i. \end{aligned}$$

□

Théorème 16

Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles de complexes indexée par I . Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

1. Linéarité : Si les familles $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont sommables, alors la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i \in I}$ est sommable et dans ce cas :

$$\sum_{i \in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i.$$

2. Positivité : Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est à valeurs positives, alors $\sum_{i \in I} u_i \geq 0$.

3. Croissance : Si les familles $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont à valeurs réelles et sommables et que pour tout $i \in I$, $u_i \leq v_i$, alors :

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i.$$

4. Inégalité triangulaire : Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors :

$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|.$$

Preuve :

1. Supposons que les familles $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont sommables, montrons que la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i \in I}$ est sommable. Remarquons que :

$$\forall i \in I, \quad |\lambda u_i + \mu v_i| \leq |\lambda| |u_i| + |\mu| |v_i|.$$

Soit J une partie finie de I . L'inégalité précédente donne :

$$\sum_{i \in J} |\lambda u_i + \mu v_i| \leq \lambda \sum_{i \in J} |u_i| + |\mu| \sum_{i \in J} |v_i| \leq \underbrace{\sum_{i \in I} |u_i| + |\mu| \sum_{i \in I} |v_i|}_{=M}.$$

L'ensemble $\left\{ \sum_{i \in J} |\lambda u_i + \mu v_i| \mid J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\}$ est majoré par M . Par définition, la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i \in I}$ est sommable.

Montrons l'égalité en utilisant le théorème 14. Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ une bijection. On sait alors que :

$$\sum_{i \in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_{\varphi(n)} + \mu v_{\varphi(n)}).$$

Or les séries $\sum_{n \geq 0} u_{\varphi(n)}$ et $\sum_{n \geq 0} v_{\varphi(n)}$ sont convergentes, ainsi :

$$\sum_{i \in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_{\varphi(n)}.$$

Comme les famille $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont sommables, on peut appliquer à nouveau le théorème 14. Finalement :

$$\sum_{i \in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i.$$

2. Premier cas : Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ à valeurs positives n'est pas sommable, alors

$$\sum_{i \in I} u_i = +\infty \geq 0.$$

Deuxième cas : Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, on a pour toute partie finie J de I ,

$$0 \leq \sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i.$$

3. Considérons la famille $(v_i - u_i)_{i \in I}$ qui est à valeurs positives et sommables par linéarité. On en déduit que :

$$\sum_{i \in I} (v_i - u_i) \geq 0.$$

Par linéarité, on en déduit que :

$$\sum_{i \in I} v_i - \sum_{i \in I} u_i \geq 0$$

Finalement :

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i.$$

4. soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ une bijection. Comme la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, le théorème 14 assure que :

$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} \right| \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} |u_i| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{\varphi(n)}|$$

Or l'inégalité triangulaire pour les séries convergentes assure que :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{\varphi(n)}|.$$

En conclusion :

$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|.$$

□

Théorème 17

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels POSITIFS.

Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable. et si $\sum_{i \in I} u_i = 0$ alors pour tout $i \in I$, $u_i = 0$.

Preuve : Comme la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, on a pour tout $j \in I$,

$$0 \leq u_j \leq \sum_{i \in I} u_i = 0$$

Par antisymétrie, on en déduit que $u_j = 0$. En conclusion,

$$\forall i \in I, \quad u_i = 0.$$

□

Proposition 18 (Conjugaison)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de complexes.

Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable alors la famille $(\overline{u_i})_{i \in I}$ est sommable.

Dans ce cas :

$$\overline{\sum_{i \in I} u_i} = \sum_{i \in I} \overline{u_i}.$$

Preuve : On remarque que :

$$\forall i \in I, \quad |\overline{u_i}| = |u_i|.$$

Ainsi par définition, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(\overline{u_i})_{i \in I}$ est sommable.

Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, on sait que $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i)$. En conjuguant cette égalité, on obtient :

$$\overline{\sum_{i \in I} u_i} = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) - i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i).$$

D'autre part,

$$\sum_{i \in I} \overline{u_i} = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(\overline{u_i}) - i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(\overline{u_i}) = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) - i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i)$$

En conclusion,

$$\overline{\sum_{i \in I} u_i} = \sum_{i \in I} \overline{u_i}.$$

□

Corollaire 19

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de complexes. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.
2. Les famille $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$ sont sommables.

Preuve : Montrons que (1) $\implies$ (2). Supposons que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable. D'après la proposition précédente, on sait que la famille $(\overline{u_i})_{i \in I}$ est sommable.

Or pour tout $i \in I$,

$$\operatorname{Re}(u_i) = \frac{1}{2}(u_i + \overline{u_i}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(u_i) = \frac{1}{2}(u_i - \overline{u_i}).$$

On en déduit par linéarité que les familles $(u_i)_{i \in I}$ et $(\overline{u_i})_{i \in I}$ sont sommables.

Réciproquement, supposons que les familles $(u_i)_{i \in I}$ et $(\overline{u_i})_{i \in I}$ sont sommables.

Comme pour tout $i \in I$, $u_i = \operatorname{Re}(u_i) + i \operatorname{Im}(u_i)$, on en déduit à nouveau par linéarité que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

□

43.3 Permutation des termes d'une série numérique



Faisons un petit tour de mathémagie



Reprenons la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ qui converge vers $\ln(2)$. En réarrangeant les termes de la série devient :

$$\begin{aligned} \ln(2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \dots\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi $\ln(2) = 0$ ce qui est absurde.

On ne peut pas permuter les termes d'une série sans précautions. La permutation choisie est telle que la nouvelle série converge vers la moitié de la somme de la série de départ.

Dans le cas de la convergence absolue, on peut permuter les termes :

Théorème 20

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.

On suppose que la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument alors, pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la série

$\sum_{n \geq 0} u_{\varphi(n)}$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Autrement dit, dans le cas d'une série absolument convergente, on peut changer l'ordre des termes pour le calcul de la somme de la série.

Preuve : Comme la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument, la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable. Appliquons le corollaire 14 avec $I = \mathbb{N}$. On

en déduit que la famille $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable. Donc la série $\sum_{n \geq 0} u_{\varphi(n)}$ converge absolument.

On a alors l'égalité :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n &= \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{\varphi(n)} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}. \end{aligned}$$

□

Remarque : L'hypothèse d'absolue convergence apparaît dans tous les théorèmes de transfert en probabilités. Le théorème précédent nous assure qu'on peut permuter sans danger les termes d'une série constituant la valeur de l'espérance d'une variable aléatoire.

43.4 Applications aux séries doubles

Nous allons nous intéresser au cas où $I = \mathbb{N}^2$ (qui rappelons est dénombrable).

Soit $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de complexes indicées par $\mathbb{N}^2$.

L'un des enjeux de ce paragraphe est de savoir à quelles conditions, il est permis d'affirmer l'égalité :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j} \quad ?$$

Montrons tout d'abord que ces égalités ne sont pas vérifiées en général en traitant les deux exemples ci-dessous :

43.4.1 Exemples

Exemple : Illustrons nos propos avec la suite double $(u_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{si } i = 0 \\ \frac{1}{2^i} & \text{si } i \geq 1 \end{cases}$$

Représentons les éléments de cette suite dans un tableau infini (ou une matrice infinie). Nous additionnerons tous les termes des lignes et des colonnes.

$j \backslash i$	0	1	2	3	...	$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^p u_{i,j}$
0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	...	0
1	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	...	0
2	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	...	0
3	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$\lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^q u_{i,j}$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	...	$\begin{matrix} \text{F.I.} & 0 \end{matrix}$

Grâce à ce tableau, on constate que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^p u_{i,j} = 0$.

Ainsi pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^q \sum_{i=0}^p u_{i,j} = 0.$$

D'autre part, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^q \sum_{i=0}^p u_{i,j}$ n'existe pas. Il ne peut y avoir égalité entre $\lim_{q \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^q \sum_{i=0}^p u_{i,j}$ et

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^q \sum_{i=0}^p u_{i,j}.$$

Exemple : Considérons la suite double $(u_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -\frac{1}{2^{j-i}} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

$\begin{array}{c} i \\ \diagdown \\ j \end{array}$	0	1	2	3	4	...	$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^p u_{i,j}$
0	1	0	0	0	0	...	1
1	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	0	...	$\frac{1}{2}$
2	$-\frac{1}{2^2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	...	$\frac{1}{2^2}$
3	$-\frac{1}{2^3}$	$-\frac{1}{2^2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	...	$\frac{1}{2^3}$
4	$-\frac{1}{2^4}$	$-\frac{1}{2^3}$	$-\frac{1}{2^2}$	$-\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{2^4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^q u_{i,j}$	0	0	0	0	0	...	$\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 0 \end{array}$

En utilisant à nouveau le tableau, on constate que pour tout $i \in \mathbb{N}$, les séries (simples) $\sum_{j \geq 0} u_{i,j}$ et $\sum_{i \geq 0} u_{i,j}$ sont convergentes et

$$\begin{cases} \forall i \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = 0. \\ \forall j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j} = \frac{1}{2^j}. \end{cases}$$

Or les séries $\sum_{i \geq 0} 0$ et $\sum_{j \geq 0} \frac{1}{2^j}$ sont convergentes de sommes respectives 0 et 2. On constate ainsi que :

$$0 = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \neq \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j} = 2.$$

43.4.2 Généralités

Théorème 21 (Cas d'une famille positive)

Soit $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de nombre positifs indicée par $\mathbb{N}^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.
2. (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, la série numérique $\sum_{m \geq 0} u_{m,n}$ est convergente.
- (b) La série numérique $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} \right)$ est convergente.

Dans ce cas :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} \right] = \sum_{m=0}^{+\infty} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} \right].$$

Remarques :

1. Si une suite double $(u_{i,j})_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est définie sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on peut définir de manière superficielle les termes $u_{0,0}, u_{0,1}, u_{1,0}$ en posant par convention que : $u_{0,0} = u_{0,1} = u_{1,0} = 0$
2. Le théorème précédent s'applique aussi au calcul d'une somme d'une série « faussement » double du type $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^i u_{i,j}$ puisqu'il suffit de poser $u_{i,j} = 0$ pour tout couple (i,j) tel que $j > i$.

Exemple : Étudions les séries doubles $\sum_{i,j \geq 0} \frac{1}{i!j!}$, $\sum_{i,j \geq 0} \frac{1}{2^{i+j}}$ et $\sum_{i,j \geq 0} \frac{i^j}{j!}$.

Théorème 22 (Cas complexe)

Soit $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de nombre complexes indicée par $\mathbb{N}^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.
2. (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, la série numérique $\sum_{m \geq 0} |u_{m,n}|$ est convergente.
- (b) La série numérique $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |u_{m,n}| \right)$ est convergente.

Dans ce cas :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} \right] = \sum_{m=0}^{+\infty} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} \right].$$

Exemple : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, étudions la série double $\sum_{i,j \geq 0} \frac{\lambda^{i+j}}{i!j!}$.

Exercice E3 : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. On pose :

$$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad u_{m,n} = z^{mn}.$$

1. Montrer que la famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2. Montrer que :

$$\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} z^{mn} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n z^n$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d_n est le nombre de diviseurs positifs de n .

Indication :

1. Appliquer le théorème de Fubini en utilisant des séries géométriques.
2. Utiliser la partition :

$$(\mathbb{N}^*)^2 = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} I_n \quad \text{avec} \quad I_n = \{(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid ij = n\}.$$

□

Correction :

1. Montrons que $(u_{m,n})_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La série numérique $\sum_{m \geq 1} |u_{m,n}|$ est la série géométrique $\sum_{m \geq 0} |z^n|^m$ dont la raison $|z^n| < 1$. Elle est donc convergente et sa somme vaut :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} |z^n|^m = \frac{|z|^n}{1 - |z^n|}.$$

- (b) Étudions la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{|z|^n}{1 - |z^n|}$. Comme $|z| < 1$, on remarque que :

$$\frac{|z|^n}{1 - |z^n|} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |z^n| \geq 0$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} |z|^n$ est convergente. D'après le théorème de comparaison par équivalent des séries positives, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|z|^n}{1 - |z^n|}$ est convergente.

D'après le théorème de Fubini, la famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

2. Considérons la partition suivante de $(\mathbb{N}^*)^2$:

$$(\mathbb{N}^*)^2 = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} I_n \quad \text{avec} \quad I_n = \{(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid ij = n\}.$$

D'après la question précédente, la famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2} u_{i,j} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(i,j) \in I_n} u_{i,j}. \\ \sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2} z^{ij} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(i,j) \in I_n} z^{ij} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\sum_{(i,j) \in I_n} z^n \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[z^n \sum_{(i,j) \in I_n} 1 \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \text{card}(I_n). \end{aligned}$$

Or remarquons que

$$I_n = \{(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid ij = n\} = \left\{ \left(i, \frac{n}{j} \right) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid ij = n \right\} = \left\{ \left(i, \frac{n}{j} \right) \mid i \text{ est un diviseur positif de } n \right\}$$

Ainsi $\text{card}(I_n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n que l'on note d_n . En conclusion :

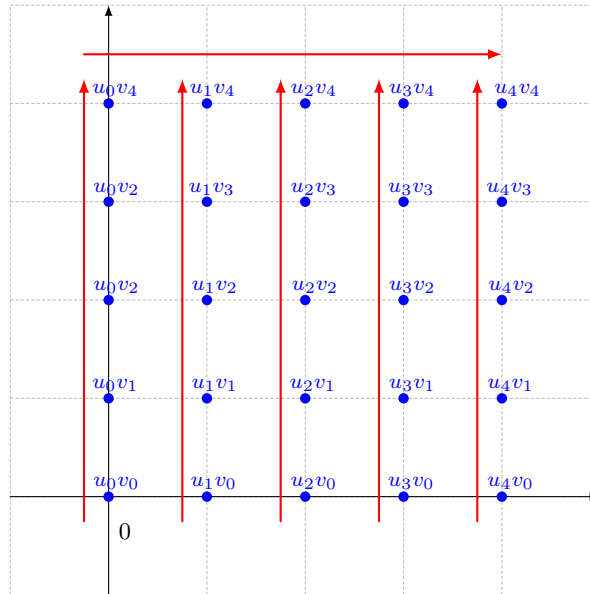
$$\boxed{\sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2} z^{ij} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n z^n.}$$

□

43.4.3 Produit de Cauchy

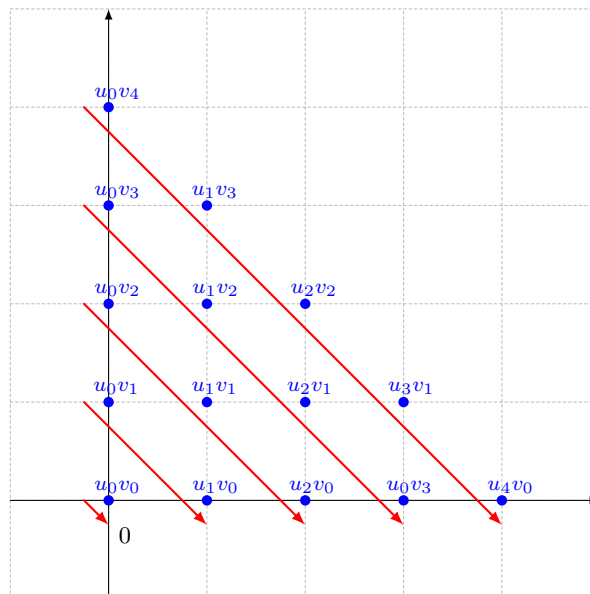
Considérons deux séries numériques $\sum_{i \geq 0} u_i$ et $\sum_{j \geq 0} v_j$ convergente. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j \right) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(u_i \sum_{j=0}^{+\infty} v_j \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_i v_j \right) \\ &= (u_0 v_0 + u_0 v_1 + u_0 v_2 + \dots) + (u_1 v_0 + u_1 v_1 + u_1 v_2 + \dots) \\ &\quad + (u_2 v_0 + u_2 v_1 + u_2 v_2 + \dots) + \dots \end{aligned}$$



La question est la suivante, peut-on réarranger les termes de la somme de telle sorte que :

$$\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j \right) = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \dots \quad ?$$



Définition 23

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries numériques. On définit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

Le produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ est la série numérique $\sum_{n \geq 0} w_n$.

Théorème 24

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries numériques.

Si les deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont absolument convergentes. Alors la famille $(u_m v_n)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} u_m v_n = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Preuve : Appliquons le théorème de Fubini à la famille $(u_m v_n)_{m,n \in \mathbb{N}^2}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, la série numérique $\sum_{m \geq 0} |u_m v_n|$ est convergente de somme :

$$|v_n| \sum_{m=0}^{+\infty} |u_m|.$$

car la $\sum_{m \geq 0} u_m$ est absolument convergente.

2. La série numérique $\sum_{n \geq 0} |v_n| \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |u_m| \right)$ est elle aussi convergente de somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| \sum_{m=0}^{+\infty} |u_m|$ car la série numérique $\sum_{n \geq 0} v_n$ est absolument convergente.

D'après le théorème de Fubini, la famille $(u_m v_n)_{m,n \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} u_m v_n = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_m v_n \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

□

Théorème 25

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries numériques.

Si les deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont absolument convergentes. Alors le produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right) = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Preuve : Supposons que les deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont absolument convergentes. D'après le théorème précédent que la famille $(u_m v_n)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et que :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} u_m v_n = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) \quad (*)$$

Nous allons appliquer le théorème de Fubini à la partition suivante de $\mathbb{N}^2$:

$$\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{p=0}^{+\infty} \underbrace{\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m+n=p\}}_{=I_p}$$

qui consiste à additionner les diagonales.

D'après le théorème de Fubini,

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la famille $(u_m v_n)_{(m,n) \in I_p}$ est sommable (elle est en fait fini puisque I_p est un ensemble fini).

2. La série numérique $\sum_{p \geq 0} \left(\sum_{(m,n) \in I_p} |u_m v_n| \right)$ est convergente.

Or remarquons que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad |w_p| = \left| \sum_{k=0}^n u_k v_{p-k} \right| = \left| \sum_{(m,n) \in I_p} u_m v_n \right| \leq \sum_{(m,n) \in I_p} |u_m v_n|$$

D'après le théorème de comparaison par inégalité des séries positives, on en déduit que $\sum_{p \geq 0} |w_p|$ est convergente. Ainsi la série numérique $\sum_{p \geq 0} w_p$ est bien absolument convergente.

Enfin, le dernier résultat du théorème de Fubini assure que :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} u_m v_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{(m,n) \in I_p} u_m v_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n u_k v_{p-k} = \sum_{p=0}^{+\infty} w_p.$$

D'après l'égalité (*), on en déduit que :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} w_p = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

□

Exemples :

1. Soit $\sum u_{i,j}$ une série double absolument convergente de somme S . On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i+j=n\}$$

$$\text{Justifier que } S = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{(i,j) \in I_n} u_{i,j}.$$

2. Déterminer la nature et la somme éventuelle de la série double $\sum_{i,j \geq 0} \frac{1}{(i+j)!}$.

Exercice E4 : Montrer à l'aide d'un produit de Cauchy que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n.$$

Exercice E5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que :

$$e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}.$$

Indication :

1. Utiliser que $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.
2. Faire apparaître un produit de Cauchy à partir du membre de gauche en justifiant bien son existence.
3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

□

Exercice C6 : [Théorème de Mertens]

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries numériques.

On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont convergentes. Montrer le produit de

Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n$ est convergent et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right) = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

On introduira pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite des sommes partielles :

$$V_n = \sum_{k=0}^n v_k \quad \text{et} \quad V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Indications :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n w_k = \sum_{p=0}^n u_p V_{n-p}$ en utilisant une somme triangulaire.

2. Introduisons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_p(n) = \begin{cases} u_p V_{n-p} & \text{si } p \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

de telle sorte que :

$$\sum_{k=0}^n w_k = \sum_{p=0}^{+\infty} f_p(n).$$

3. Appliquer le théorème de la double limite à la série de fonctions $\sum_{p \geq 0} f_p$ (qui est définie sur $\mathbb{N}$), puis conclure que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n w_k = \sum_{p=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_p(n) = \dots$$

□