Chapitre 8

Équations différentielles linéaires

Sommaire

Les équations différentielles permettent de modéliser l'évolution de phénomènes issus de la physique, chimie, biologie, ingénierie. Historiquement les équations différentielles font leur apparition en mécanique céleste avec Isaac Newton. Ce dernier développe le calcul différentiel (dérivation et intégration) pour résoudre les équations différentielles. Après les découvertes des principes newtoniens, de nombreux scientifiques pensent que la nature est déterministe dans le sens où elle est régi par des équations et que la résolution des ces dernières permettrait de tout prédire.
Néanmoins, cette vision de la nature rencontre deux obstacles. De nombreuses équations différentielles (et aux dérivées partielles) n'ont pas encore de solutions (équations de turbulences, équations de Navier-Stokes...).
D'autre part, on a découvert au XX^e siècle que certaines solutions d'équations différentielles ont un comportement chaotique : une infime variation des conditions initiales engendre parfois des variations énormes à long terme. En 1972, le météorologue Edward Lorenz popularise cette théorie du chaos avec ce que l'on appelle désormais "l'effet papillon" dans sa célèbre conférence qui s'intitule *"Le battement d'aile d'un papillon au Brésil, peut-il déclencher une tornade au Texas ?"*. Cet effet papillon qui semble s'opposer au déterminisme newtonien est repris par de nombreux cinéastes notamment dans les films comportant des voyages dans le temps...

8.1 Introduction

Nous travaillerons selon le contexte avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour simplifier, on notera donc $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ et qui fait intervenir cette fonction ainsi que ces dérivées successives.
L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre maximal de dérivation de la fonction inconnue.

Exemple : Considérons l'équation différentielle :

$$e^x y'' + \cos(x)y = \sin(5x).$$

Cette équation différentielle est d'ordre 2 et l'inconnue est une fonction y. Remarquons que la notation est abusive (absence de quantificateur et absence d'ensemble auquel appartient la variable x). Néanmoins, la tradition nous autorise ce genre d'écriture.
On cherche en fait un intervalle I et les fonctions y deux fois dérivable sur I vérifiant :

$$\forall x \in I, \quad e^x y''(x) + \cos(x)y(x) = \sin(5x).$$

Remarque : Résoudre une équation différentielle, c'est trouver :
- Un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Les fonctions y suffisamment dérivable sur I vérifiant l'équation différentielle.

Nous verrons que la plupart du temps l'intervalle I sera donné en MPSI.

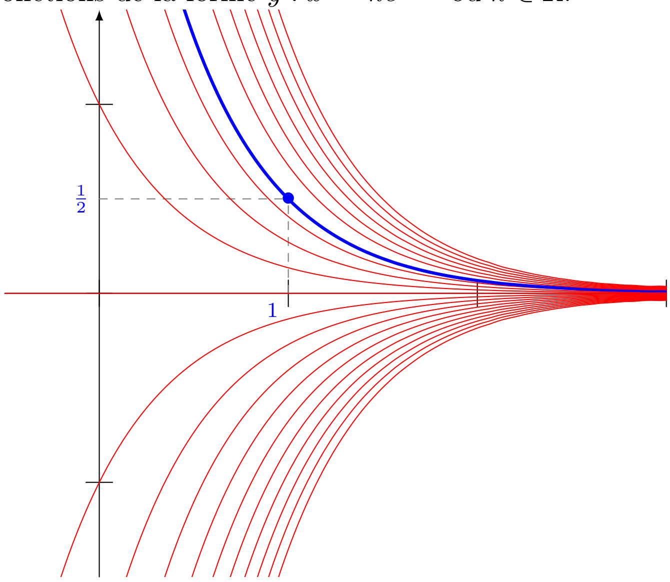
8.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

8.2.1 Généralités sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1

Définition 2

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{K}$, $b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur I. On considère l'**équation différentielle linéaire d'ordre 1**
$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (E)$$
Résoudre l'équation différentielle (E), consiste à trouver toutes les fonctions $y : I \to \mathbb{K}$ dérivables sur I, telles que pour tout $x \in I$,
$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les courbes représentatives des solutions de (E) sont appelées **courbes intégrales** de (E).
3. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. On appelle **problème de Cauchy** la donnée d'une équation différentielle d'ordre 1 (E) et de la **condition initiale** $y(x_0) = y_0$ (CI) :
$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & (E) \\ y(x_0) = y_0 & (CI) \end{cases}$$
Résoudre le problème de Cauchy, c'est trouver les solutions de (E) qui vérifient la condition initiale (CI).

Exemple : Soit l'équation différentielle $y' + 2y = 0$. On admet que cette équation différentielle a pour solutions les fonctions de la forme $y : x \mapsto ke^{-2x}$ où $k \in \mathbb{R}$.



Résolvons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2y = 0 \\ y(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On cherche un réel k tel que $ke^{-2} = \dfrac{1}{2}$, on obtient une unique valeur $k = \dfrac{e^2}{2}$.
Ainsi il y a une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ au problème de Cauchy, donnée par

$$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y(x) = \dfrac{e^2}{2} e^{-2x} \end{cases}$$

Définition 3

L'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ (E_0) est appelée **équation homogène** associée à (E) ou encore équation sans second membre.

Théorème 4

Les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $y = y_h + y_p$ où y_h est une solution quelconque de l'équation homogène (E_0) et y_p est une solution particulière de (E).

À retenir

Solutions générales de l'équation avec second membre	=	UNE Solution particulière de l'équation avec second membre	+	Solutions générales de l'équation HOMOGÈNE

Preuve : Soit y_p une solution particulière de (E). Ainsi pour tout $x \in I$, $y_p'(x) + a(x)y_p(x) = b(x)$.
Montrons que si y est solution de (E) alors y s'écrit $y_h + y_p$ où y_h est une solution de (E_0).
Soit y une solution de (E). Posons $f = y - y_p$. On remarque que :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) + a(x)f(x) = (y - y_p)'(x) + a(x)(y - y_p)(x) = y'(x) + a(x)y(x) - y_p'(x) - a(x)y_p(x) = b(x) - b(x) = 0.$$

Donc f est solution de (E_0). Ainsi $y - y_p = f$, donc $y = y_p + f$ où f est une solution de (E_0).
Réciproquement, soit y_h une solution de (E_0). On vérifie que $y_h + y_p$ est bien une solution de (E) car :

$$\forall x \in I, \quad (y_h + y_p)'(x) + a(x)(y_h + y_p)(x) = y_h'(x) + a(x)y_h(x) + y_p'(x) + a(x)y_p(x) = 0 + b(x) = b(x).$$

$\square$

Exemple : Considérons l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 6 \quad (E)$$

On admet que les solutions de l'équation homogène associée est $y' + 2y = 0$ sont les fonctions de la forme

$$y_h : x \mapsto ke^{-2x}, \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs on remarque que la fonction constante égale à 3 est une solution particulière de (E).
Ainsi les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto ke^{-2x} + 3, \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

8.2.2 Structure de l'ensemble des solutions l'équation homogène

Examinons la structure de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0 \quad (E_0)$, où $a : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue sur un intervalle I.

Proposition 5

On considère l'équation différentielle homogène : $y' + a(x)y = 0 \quad (E_0)$.

1. Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E_0) alors $y_1 + y_2$ est une solution de (E_0).
2. Si y est une solution de (E_0) et $\lambda \in \mathbb{K}$ est une constante alors λy est une solution de (E_0).

Preuve :

1. Soit y_1 et y_2 des solutions de (E_0), on a :

$$\forall x \in I, \quad \begin{cases} y_1'(x) + a(x)y_1(x) = 0 \\ y_2'(x) + a(x)y_2(x) = 0 \end{cases}$$

   En additionnant les deux égalités, on obtient pour tout $x \in I$, $(y_1 + y_2)'(x) + a(x)(y_1 + y_2)(x) = 0$, donc $y_1 + y_2$ est bien solution de (E_0).
2. Soit y une solution de (E_0). Ainsi pour tout $x \in I$, $y'(x) + a(x)y(x) = 0$. En multipliant cette égalité par λ on obtient pour tout $x \in I$,

$$(\lambda y)'(x) + a(x)\,\lambda y(x) = 0.$$

   Par conséquent, λy est solution de (E_0).

$\square$

Remarques : Notons $\mathcal{S}_{E_0}$ l'ensemble des solutions de (E_0). La proposition se traduit ainsi :

1. Soit $y_1, y_2 \in \mathcal{S}_{E_0}$. Alors $y_1 + y_2 \in \mathcal{S}_{E_0}$.
2. Soit $y \in \mathcal{S}_{E_0}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une constante. Alors $\lambda y \in \mathcal{S}_{E_0}$.

Pour ces raisons, on dit que $\mathcal{S}_{E_0}$ est un espace vectoriel.

8.2.3 Résolution de l'équation homogène

On cherche maintenant les fonctions y telle que pour tout $x \in I$, $y'(x) = -a(x)y(x) \quad (E)$.
Cherchons-les sous la forme $y : x \mapsto e^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur I. En effet, on a dans ce cas :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) = u'(x)y(x).$$

Il suffit donc de choisir la fonction u de telle que sorte que pour tout $x \in I$, $u'(x) = -a(x)$.
Soit $x \mapsto A(x)$ une primitive de $x \mapsto a(x)$ sur I (qui existe puisque la fonction a est continue sur I).
Alors la fonction $x \mapsto e^{-A(x)}$ est une solution de (E_0).
D'après le point 2 de la proposition précédente, toutes les fonctions de la forme

$$x \mapsto ke^{-A(x)}$$

où $k \in \mathbb{K}$ sont aussi des solutions de (E). On va montrer qu'il n'y en a pas d'autres.

Théorème 6

Soit A une primitive de a sur I. Les solutions de (E_0) sont toutes les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto ke^{-A(x)}, \quad k \in \mathbb{K}.$$

Preuve : Il reste à montrer que si y une solution de (E_0), alors elle est bien de la forme $y : x \mapsto ke^{-A(x)}$. Soit y une solution de (E_0).
Comme l'exponentielle ne s'annule jamais, on peut considérer la fonction $g : x \mapsto \dfrac{y(x)}{e^{-A(x)}} = y(x)e^{A(x)}$. La fonction g est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = y'(x)e^{A(x)} + y(x)A'(x)e^{A(x)} = \big(y'(x) + a(x)y(x)\big)e^{A(x)} = 0.$$

Comme on travaille sur un INTERVALLE I, on peut en déduire que g est une fonction constante sur I.
Notons k sa valeur, on obtient bien pour tout $x \in I$, $g(x) = k$, c'est-à-dire : $\dfrac{y(x)}{e^{-A(x)}} = k$. En conclusion,

$$\forall x \in I, \quad y(x) = ke^{-A(x)}.$$

$\square$

Méthode 7 (à faire au brouillon)

Pour se souvenir du théorème précédent et de la fonction $x \mapsto e^{-A(x)}$. On peut résoudre l'équation homogène au brouillon par une méthode mathématiquement non rigoureuse. À gauche se trouve le brouillon. À droite la rédaction à adopter sur une copie de mathématiques :

<u>BROUILLON</u> :
On suppose que y ne s'annule pas sur I. L'équation homogène devient :

$$y' + a(x)y = 0 \iff \frac{y'}{y} = -a(x).$$

On reconnaît à droite la dérivée de $\ln(|y|)$. On intègre des deux cotés :

$$\ln(|y|) = -A(x) + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En prenant l'exponentielle, on obtient :

$$|y| = e^{-A(x)+\lambda} = e^{\lambda} e^{-A(x)}$$

On enlève les valeurs absolues sans trop justifier :

$$y = \underbrace{\pm e^{\lambda}}_{=k} e^{-A(x)} = ke^{-A(x)}, \quad k \in \mathbb{R}$$

<u>Rédaction correcte sur une copie</u> :

Les solutions générales de l'équation homogène

$$y' + a(x)y = 0$$

sont les fonctions définies sur I par

$$x \mapsto ke^{-A(x)}, \quad k \in \mathbb{K}$$

où $x \mapsto A(x)$ est une primitive de $x \mapsto a(x)$ sur I.

<u>*Exemples*</u> :

1. On considère l'équation différentielle $y' + 4x\,y = 0$. Une primitive de $x \mapsto 4x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 2x^2$.
   Les solutions de l'équation différentielle sont toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto ke^{-2x^2}$ où $k \in \mathbb{R}$.
2. Dans le cas particulier où a est une fonction constante, une primitive de $x \mapsto a$ sur $\mathbb{R}$ est donnée par $A : x \mapsto ax$, les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont les fonctions $y : x \mapsto ke^{-ax}$.
   C'est le cas que l'on rencontre souvent en physique (circuit RC, par exemple).

<u>*Remarque*</u> : Il arrive souvent de rencontrer des équations différentielles de la forme : $\gamma(x)y' + \alpha(x)y = 0$. Pour utiliser les théorèmes et méthodes précédents, on divise par $\gamma(x)$ et on restreint l'étude de l'équation différentielle sur un intervalle sur lequel γ ne s'annule pas :

$$y' + \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}y = 0.$$

On dit que l'on s'est ramené à une forme résolue de l'équation différentielle.

<u>*Exercice A1*</u> : Résoudre l'équation différentielle $(1 + x^2)y' + y = 0$.

<u>*Exercice A2*</u> :

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' + \dfrac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}y = 0 \quad (E_0)$.
2. On cherche à résoudre l'équation différentielle $y' + \dfrac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}y = 2\sin(x) \quad (E)$.
   (a) Trouver une solution particulière de (E) de la forme $x \mapsto a\cos(x) + b$ où a, b sont à déterminer.
   (b) En déduire l'ensemble des solution de (E).

<u>*Exercice A3*</u> : Résoudre l'équation différentielle $y' + \mathrm{th}(x)y = \mathrm{sh}(x)$.

<u>*Exercice A4*</u> : Résoudre l'équation différentielle $y' + xy = x^2 + 1$. (On trouvera une solution particulière polynomiale).

8.2.4 Solution particulière de l'équation avec second membre

Nous allons désormais rechercher une solution de $y' + a(x)y = b(x)$ (E). Pour l'instant, rien ne nous assure que l'on peut accomplir cette tâche. Avant de donner des méthodes de recherche, nous donnons un théorème théorique qui nous assure l'existence d'une telle solution :

Théorème 8 (Existence)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur I. L'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (E)$$

admet toujours une solution.
Plus précisément. Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & (E) \\ y(x_0) = y_0 & (CI) \end{cases}$$

admet une UNIQUE solution.

Preuve : Rappelons que les solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ où $x \mapsto A(x)$ est une primitive de $x \mapsto a(x)$ sur I et λ est une constante de $\mathbb{K}$.
L'idée consiste à faire "varier" la constante λ (ceci sonne contradictoire !). On va chercher des solutions de l'équation avec second membre $y' + a(x)y = b(x)$ sous la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$ où λ est une fonction dérivable sur I et non une constante.
Soit $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction dérivable sur I qui est solution du problème de Cauchy. On peut écrire :

$$\forall x \in I, \quad y(x) = \underbrace{y(x)e^{A(x)}}_{=\lambda(x)} e^{-A(x)} = \lambda(x)e^{-A(x)},$$

Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned}
\forall x \in I, \quad \begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} &\iff \forall x \in I, \quad \begin{cases} \lambda'(x)e^{-A(x)} - \lambda(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \\
&\iff \forall x \in I, \quad \begin{cases} \lambda'(x)e^{-A(x)} = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \\
&\iff \forall x \in I, \quad \begin{cases} \lambda'(x) = b(x)e^{A(x)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \\
&\iff \forall x \in I, \quad \begin{cases} \lambda(x) - \lambda(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \\
&\iff \forall x \in I, \quad \begin{cases} \lambda(x)e^{-A(x)} - \lambda(x_0)e^{-A(x)} = \left[\displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt\right] e^{-A(x)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \\
&\iff \forall x \in I, \quad \begin{cases} y(x) = \lambda(x_0)e^{-A(x)} + \left[\displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt\right] e^{-A(x)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \\
&\iff \forall x \in I, \quad \begin{cases} y(x) = \lambda(x_0)e^{-A(x)} + \left[\displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt\right] e^{-A(x)} \\ \lambda(x_0)e^{-A(x_0)} = y_0 \end{cases} \\
&\iff \forall x \in I, \quad \begin{cases} y(x) = \lambda(x_0)e^{-A(x)} + \left[\displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt\right] e^{-A(x)} \\ \lambda(x_0) = y_0 e^{A(x_0)} \end{cases} \\
&\iff \forall x \in I, \quad y(x) = \underbrace{y_0 e^{A(x_0)} e^{-A(x)}}_{\text{solution de } (E_0)} + \underbrace{\left[\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt\right] e^{-A(x)}}_{\text{solution particulière de } (E)}
\end{aligned}$$

On a bien obtenu une unique solution au problème de Cauchy. $\square$

Remarques :

1. Il ne faut surtout pas apprendre la formule finale précédente, mais savoir la retrouver en appliquant la méthode de la variation de la constante.
2. Vous retrouverez cette méthode dans un cadre plus général en MP. Cela vaut la peine de bien comprendre ce qui se passe dès cette année.

Exercice E5 : Soit a, b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et impaires. Soit f une solution de l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Montrer que la fonction f est paire.

Exercice E6 : Soit $T > 0$. Soit a, b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques. Soit f une solution de l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Montrer que la fonction f est T-périodique si, et seulement si, $f(0) = f(T)$.

8.2.5 Méthode de la variation de la constante

Nous allons donner une méthode qui permet d'obtenir une solution particulière de (E) à partir des solutions de l'équation homogène.

Méthode 9 (de la variation de la constante)

1. Rappelons que les solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sont $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ où A est une primitive de a sur I et $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. On cherche une solution particulière y_p en faisant "varier la constante", c'est-à-dire de la forme $x \mapsto y_p(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$ où, cette fois, $x \mapsto \lambda(x)$ est une fonction dérivable sur I.
3. Remarquons que pour tout $x \in I$,
$$y_p'(x) + a(x)y_p(x) = \lambda'(x)e^{-A(x)} + \lambda(x)(-a(x))e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = \lambda'(x)e^{-A(x)}.$$
4. La fonction y_p précédente est solution de l'équation avec second membre si, et seulement si, pour tout $x \in I$,
$$\boxed{\lambda'(x)e^{-A(x)} = b(x)} \iff \lambda'(x) = e^{A(x)}b(x).$$
5. On choisit donc pour $x \mapsto \lambda(x)$ comme une primitive sur I de $x \mapsto e^{A(x)}b(x)$.
6. On en déduit une solution particulière y_p sachant que pour tout $x \in I$, $y_p(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$.

Exemple : Résolvons l'équation différentielle $y' + 4xy = xe^{-x^2} \quad (E)$

L'équation homogène est $y' + 4xy = 0 \quad (E_0)$ dont les solutions sont de la forme $y_h : x \mapsto \lambda e^{-2x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \lambda(x)e^{-2x^2}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. La méthode de la variation de la constante donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x)e^{-2x^2} = xe^{-x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x) = xe^{x^2}.$$

On peut choisir pour $\lambda : x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$. Finalement une solution particulière de (E) est $y_p : x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}e^{-2x^2} = \frac{1}{2}e^{-x^2}$.

En conclusion, les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme :

$$\boxed{y : x \mapsto y_h(x) + y_p(x) = \lambda e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Exercice E7 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
2. $y' + 2xy = e^{x-x^2}$
3. $(1+x^2)y' + xy = \sqrt{1+x^2}$
4. $(1+x^2)y' - xy = (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$
5. $(1+e^x)y' + e^x y = 1 + e^x$
6. $(1+\cos^2(x))y' - \sin(2x)y = \cos(x)$.
7. $x(1+\ln^2(x))y' - 2\ln(x)y = (1+\ln^2(x))^2$ sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$

Exercice A8 : Résoudre l'équation différentielle : $y' - y = \mathsf{Arctan}(e^x)$.

Exercice A9 : Résoudre l'équation différentielle : $y' - \ln(x)y = x^x$ sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

8.2.6 Cas particulier où la fonction a est constante

On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 dans le cas où a est une constante et la fonction b a une forme simple :

$$y' + ay = b(x) \quad (E)$$

Rappelons tout d'abord que les solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0 \quad (E_0)$ sont les fonctions :

$$y_h : x \mapsto \lambda e^{-ax} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Méthode 10 (Solution particulière de $y' + ay = \beta e^{\alpha x}$)

Pour trouver une solution particulière dans le cas où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $b(x) = \beta e^{\alpha x}$.

1. Si $\alpha \neq -a$, on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto \gamma e^{\alpha x}$ où γ est une constante dans $\mathbb{K}$ à déterminer.
2. Si $\alpha = -a$, on vérifie que la fonction $x \mapsto \beta x e^{-ax}$ est directement une solution particulière de (E).

Remarque : On compare ici l'exposant $-a$ de l'exponentielle des solutions générales de (E_0) avec l'exposant α de l'exponentielle du second membre.

Exemple : Résolvons l'équation différentielle : $y' + 3y = 2e^{5x}$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_h : x \mapsto \lambda e^{-3x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Comme $5 \neq -3$. On cherche une solution particulière de la forme $y_p : x \mapsto \gamma e^{5x}$. Or, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y_p'(x) + 3y_p(x) = 2e^{5x}$$

$$5\gamma e^{5x} + 3\gamma e^{5x} = 2e^{5x}$$

$$8\gamma e^{5x} = 2e^{5x}$$

Par identification, $8\gamma = 2$ donc $\gamma = \frac{1}{4}$. Ainsi, $y_p : x \mapsto \frac{1}{4}e^{5x}$ est une solution particulière de (E). En conclusion, les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto \lambda e^{-3x} + \frac{1}{4}e^{5x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Méthode 11 (Solution particulière de $y' + ay = \beta e^{\sigma x}\cos(\omega x)$)

On suppose que la fonction $x \mapsto a(x)$ est constante réelle égale à a.

1. On cherche une solution particulière complexe $y_{\mathbb{C}}$ de l'équation $y' + ay = \beta e^{(\sigma + i\omega)x}$ à l'aide de la méthode 10.
2. La fonction $\mathsf{Re}(y_{\mathbb{C}})$ est alors une solution particulière de l'équation différentielle $y' + ay = \beta e^{\sigma x}\cos(\omega x)$.

Méthode 12 (Solution particulière de $y' + ay = \beta e^{\sigma x}\sin(\omega x)$)

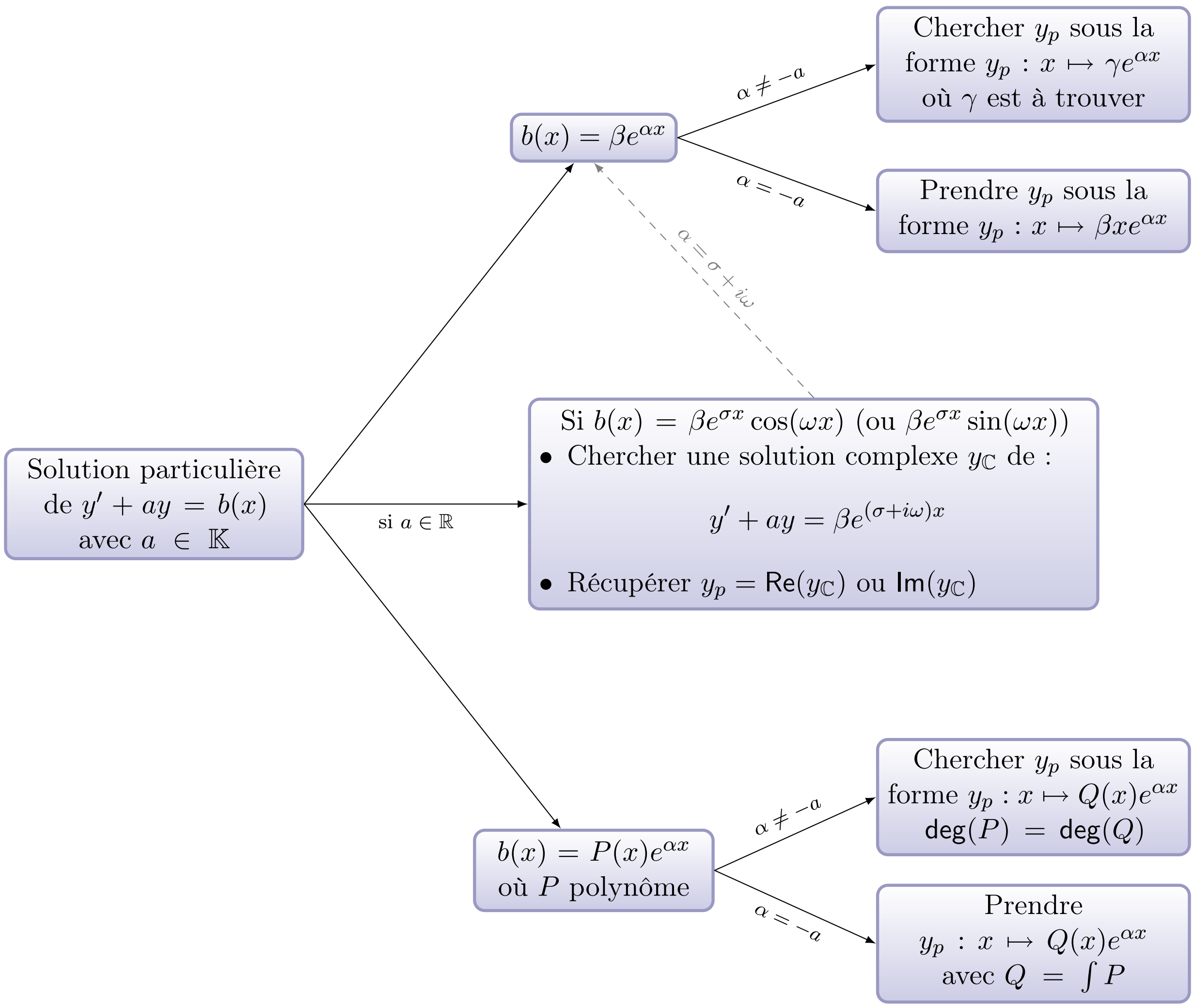
On suppose que la fonction $x \mapsto a(x)$ est constante réelle égale à a.

1. On cherche une solution particulière complexe $y_{\mathbb{C}}$ de l'équation $y' + ay = \beta e^{(\sigma+i\omega)x}$ à l'aide de la méthode 10.
2. La fonction $\mathsf{Im}(y_{\mathbb{C}})$ est alors une solution particulière de l'équation différentielle $y' + ay = \beta e^{\sigma x}\sin(\omega x)$.

Méthode 13 (Solution particulière de $y' + ay = P(x)e^{\alpha x}$)

On suppose que la fonction $x \mapsto a(x)$ est constante égale à a. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto y_p(x) = Q(x)e^{\alpha x}$ où Q est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Si $\alpha \neq -a$, on prendra $\mathsf{deg}(Q) = \mathsf{deg}(P)$.
2. Si $\alpha = -a$, on obtiendra $Q' = P$. Il suffira de prendre une primitive de P sur $\mathbb{R}$.



<u>*Exercice A10*</u> *:* Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \sin(2x)$
2. $y' + 2y = e^{2x}$
3. $y' - 5y = e^{5x}$
4. $y' - 3y = 4$
5. $y' + y = (x+1)e^{x}$
6. $y' - y = (x+1)e^{x}$

8.2.7 Principe de superposition

Proposition 14 (Principe de superposition)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{K}$, $b_1 : I \to \mathbb{K}$ et $b_2 : I \to \mathbb{K}$ trois fonctions continues sur I. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x) \qquad (E)$$

Soit y_1 une solution particulière de $y' + a(x)y = b_1(x)$ et y_2 une solution particulière de $y' + a(x)y = b_2(x)$. Alors $y_p = y_1 + y_2$ est une solution particulière de (E).

Preuve : Remarquons que pour tout $x \in I$,

$$(y_1 + y_2)'(x) + a(x)(y_1 + y_2)(x) = y_1'(x) + a(x)y_1(x) + y_2'(x) + a(x)y_2(x) = b_1(x) + b_2(x).$$

Donc $y_p = y_1 + y_2$ est une solution particulière de (E). □

Exercice E11 : Résoudre l'équation différentielle $y' + y = x - e^x + \cos(x)$

Exercice E12 : Résoudre l'équation différentielle $y' - y = e^x + e^{2x}$.

8.2.8 Conditions initiales et interprétation graphique

Rappelons le théorème

Théorème 15

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{K}$, $b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur I. Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & (E) \\ y(x_0) = y_0 & (CI) \end{cases}$$

admet une UNIQUE solution.
Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la courbe représentative d'une solution du problème de Cauchy est appelée courbe intégrale passant par le point (x_0, y_0).

Interprétation graphique $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$:
Si l'on choisit un point du plan M_0 de coordonnées (x_0, y_0), il existe une et une seule courbe intégrale passant par M_0.
En conséquence, deux courbes intégrales ne peuvent pas se rencontrer : si c'était le cas, en considérant le point d'intersection M_0, on obtiendrait deux solutions distinctes vérifiant la même condition initiale.

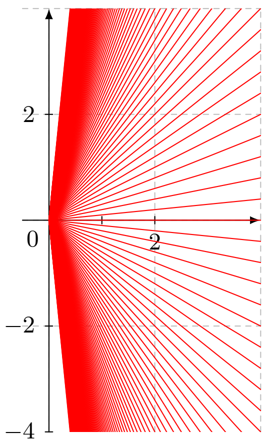
Exemple : Prenons un exemple simple pour illustrer le fait que deux courbes intégrales ne se coupent jamais. Considérons l'équation différentielle :

$$y' - \frac{1}{x}y = 0.$$

Les solutions de cette équation différentielle sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions :

$$\left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array} \right. \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

En traçant ces courbes intégrales, on remarque que ces dernières forment une partition de l'ensemble $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.



8.3 Quelques applications à la biologie et à la physique $\rightleftarrows$

8.3.1 Évolution d'une population "Law of natural growth"

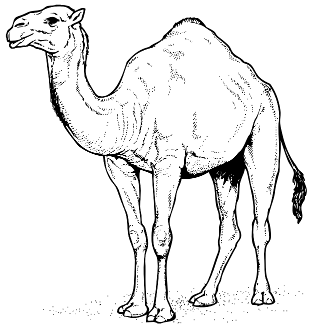
Un des modèles d'évolution de population est le modèle de Malthus. Ce dernier repose sur le fait que l'évolution de la taille de la population est proportionnelle à la taille de cette dernière. Dans le cas d'une population de bactéries ou d'animaux dans des conditions idéales (nourriture illimitée, vaste environnement, absence de prédateurs et pas de maladies contagieuses), ce modèle peut s'appliquer.
On note $N : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ le nombre d'individus de la population étudiée qui est une fonction du temps t.
L'équation différentielle régissant cette évolution est :

$$\frac{dN}{dt} = (n - m)N,$$

où n est le taux de naissance et m le taux de mortalité de la population. La résolution de l'équation donne :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad N(t) = N(0)e^{(n-m)t}.$$

- Si $n > m$, $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = +\infty$. La population subit une croissance exponentielle.
- Si $n < m$, $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = 0$. La population s'éteint asymptotiquement
- Si $n = m$, la population est en équilibre.

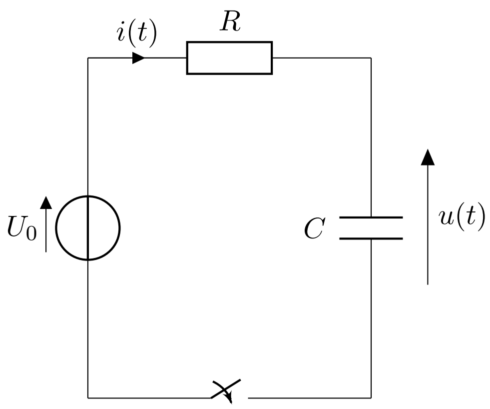


Remarques :

1. Ce modèle est simple, mais limité. Il existe d'autres modèles plus raffinés comme le modèle logistique de Verhulst.
2. Le modèle malthusien est parfois adapté à faible échelle temporelle pour modéliser des populations non endémiques comme les dromadaires en Australie ou les perches du Nil introduits dans le lac Victoria.

8.3.2 Circuit RC soumis à un échelon de tension

Considérons le circuit RC suivant soumis à un échelon de tension.



On ferme l'interrupteur à $t = 0$. Quel est le comportement de la tension aux bornes du condensateur ? La loi des mailles donne alors :

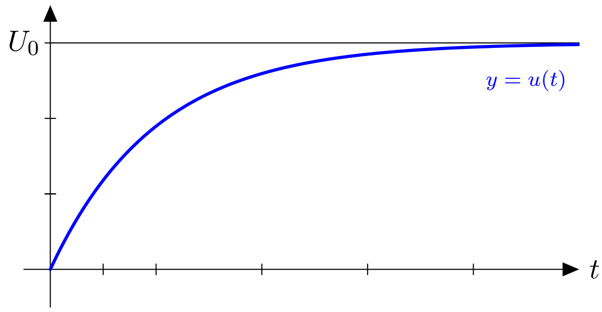
$$\begin{cases} \forall t \geqslant 0, \quad Ri(t) + u(t) = U_0 \\ U(0) = 0. \end{cases}$$

Or, on sait que la relation qui relie i et U aux bornes du condensateur est $i = C\dfrac{du}{dt}$. L'équation différentielle mettant en jeu la tension aux bornes du condensateur est :

$$\begin{cases} \forall t \geqslant 0, \quad RC\dfrac{du}{dt}(t) + u(t) = U_0 \\ U(0) = 0. \end{cases}$$

On résout cette équation différentielle, on obtient :

$$\forall t \geqslant 0, \quad u(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

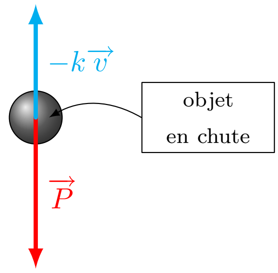


On constate que la tension u aux bornes du condensateur tend "rapidement" vers U_0. En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

8.3.3 Chute d'un objet avec résistance de l'air

On laisse tomber un objet de masse m supposé ponctuel d'un avion. La résistance de l'air que subit l'objet est une force proportionnelle à la vitesse de l'objet. Déterminons la vitesse de l'objet en fonction du temps.
En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'objet, on obtient :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} - k\overrightarrow{v}.$$



où $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{P}$ sont respectivement l'accélération, la vitesse et le poids de l'objet. La constante k est une constante de proportionnalité strictement positive. Le mouvement étant rectiligne. On peut écrire :

$$m\frac{dv}{dt} + kv = mg \quad (E).$$

Nous obtenons une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

1. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto Ce^{-\frac{k}{m}t}$.
2. Une solution particulière de (E) est $t \mapsto \dfrac{mg}{k}$.
3. On sait qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $v(t) = \dfrac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}$
4. Or $v(0) = 0$. Ainsi $C = -\dfrac{mg}{k}$.

En conclusion :

$$\boxed{\forall t \in [0, +\infty[, \quad v(t) = \frac{mg}{k}\left[1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right].}$$

On remarque $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = \dfrac{mg}{k}$.

La vitesse de l'objet tend exponentiellement vers une vitesse limite $v_\infty = \boxed{\dfrac{mg}{k}.}$

8.4 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

On notera $\mathcal{D}^2(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables deux fois sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Rappelons que suivant que la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la résolution sera différente :
Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, nous chercherons des solutions de l'équations différentielles réelles.
Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, nous chercherons des solutions de l'équations différentielles complexes.

8.4.1 Généralités

Définition 16

Soit $a,b,c\in\mathbb{K}$ des constantes avec $a\neq 0$ et $f : I\to\mathbb{K}$ une fonction continue.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :

$$ay''+by'+cy=f \quad (E)$$

c'est trouver toutes les fonctions $y : I\to\mathbb{K}$ deux fois dérivables sur I, telles que pour tout $x\in I$,

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=f(x)$$

2. Un **problème de Cauchy** est la donnée de (E) et de conditions initiales de la forme

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_1 \end{cases} \text{avec } x_0\in I \text{ et } (y_0,y_1)\in\mathbb{K}^2$$

3. L'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$ (E_0) est appelée **équation homogène** associée à (E) (ou équation sans second membre).

Théorème 17

Les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $y=y_h+y_p$ où y_h est une solution quelconque de l'équation homogène (E_0) et y_p est une solution particulière de (E).

<u>*Preuve*</u> : Soit y_p une solution particulière de (E). Si y est une autre solution de (E) alors

$$a(y-y_p)''+b(y-y_p)'+c(y-y_p)=(ay''+by'+cy)-(ay_p''+by_p'+cy_p)=f-f=0$$

donc $y-y_p$ est solution de (E_0).
Réciproquement, si y_h est une solution de (E_0) alors

$$a(y_h+y_p)''+b(y_h+y_p)'+c(y_h+y_p)=(ay_h''+by_h'+cy_h)+(ay_p''+by_p'+cy_p)=0+f=f$$

donc y_h+y_p est solution de (E).

□

À retenir à nouveau

Solutions générales de l'équation avec second membre	=	UNE Solution particulière de l'équation avec second membre	+	Solutions générales de l'équation HOMOGÈNE

8.4.2 Résolution de l'équation homogène

Nous allons tout d'abord nous intéresser à la résolution de l'équation différentielle homogène :

$$ay''+by'+cy=0 \quad (E_0)$$

où $(a,b,c)\in\mathbb{K}^*\times\mathbb{K}^2$. L'ensemble des solutions de (E_0) a une structure particulière :

Proposition 18 (Structure de l'ensemble des solutions)

1. Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E_0) alors $y_1 + y_2$ est une solution de (E_0).
2. Si y est une solution de (E_0) et $\lambda \in \mathbb{K}$ est une constante alors λy est une solution de (E_0).

Remarque : Comme pour les équations d'ordre 1, cette proposition se traduit par le fait que l'ensemble $\mathcal{S}_{E_0}$ de toutes les solutions est un "espace vectoriel".

Preuve :

1. Soit y_1 et y_2 des solutions de (E_0), on a : $\begin{cases} ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0 \\ ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0 \end{cases}$
   Par addition, on obtient $a(y_1+y_2)'' + b(y_1+y_2)' + c(y_1+y_2) = 0$. Donc $y_1 + y_2$ est solution.
2. De même, si y est solution alors $ay'' + by' + cy = 0$. En multipliant par λ on obtient $a(\lambda y)'' + b(\lambda y)' + c(\lambda y) = 0$. Donc λy est solution.

□

Dans un premier temps, on cherche des solutions de (E_0) de la forme $y : x \mapsto e^{rx}$, $r \in \mathbb{C}$:
En remplaçant dans (E_0) on obtient

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = (ar^2 + br + c)e^{rx}$$

donc y sera solution de (E_0) si, et seulement si, $ar^2 + br + c = 0$.

Définition 19

L'équation du second degré $ar^2 + br + c = 0$ est appelée **équation caractéristique** associée à (E_0).
On notera Δ le discriminant de ce trinôme.

Supposons que $(E.C.)$ ait deux solutions distinctes $r_1 \neq r_2$. Alors $x \mapsto e^{r_1x}$ est solution donc d'après la proposition toutes les fonctions $x \mapsto \lambda e^{r_1x}$ sont solutions. De même pour toutes les fonctions $x \mapsto \mu e^{r_2x}$. Finalement, avec le 1 de la proposition 18, toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1x} + \mu e^{r_2x}$ sont solutions de (E_0).

Théorème 20 (Résolution de (E_0) dans $\mathbb{C}$)

◇ Si $(E.C.)$ a deux racines distinctes r_1 et r_2, les solutions de (E_0) sont de la forme

$$y_h : x \mapsto \lambda e^{r_1x} + \mu e^{r_2x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

◇ Si $(E.C.)$ a une racine double r_0, les solutions de (E_0) sont de la forme

$$y_h : x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{r_0x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

Remarque : Il y a deux paramètres λ et μ donc $\mathcal{S}_{E_0}$ est un espace vectoriel de dimension 2 (ou plan vectoriel).
Dans le premier cas, les fonctions $x \mapsto e^{r_1x}$ et $x \mapsto e^{r_2x}$ forment une base de $\mathcal{S}_{E_0}$ car toutes les solutions s'écrivent comme combinaison de ces deux fonctions.
Dans le second cas, une base de $\mathcal{S}_{E_0}$ est formée par $x \mapsto xe^{r_0x}$ et $x \mapsto e^{r_0x}$.

Preuve :
Première étape : On vérifie que les fonctions indiquées sont bien des solutions.
◇ Si $(E.C.)$ a deux racines distinctes r_1 et r_2 alors $y_1 : x \mapsto e^{r_1x}$ et $y_2 : x \mapsto e^{r_2x}$ sont des solutions donc d'après la proposition toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto \lambda e^{r_1x} + \mu e^{r_2x}$ sont solutions.
◇ Si $(E.C.)$ a une racine double r_0 : pour appliquer la proposition, montrons que les fonctions $y_1 : x \mapsto xe^{r_0x}$ et $y_2 : x \mapsto e^{r_0x}$ sont solutions. On le sait pour y_2, vérifions-le pour y_1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_1(x) = xe^{r_0x}, \quad y_1'(x) = e^{r_0x} + r_0xe^{r_0x}, \quad y_1''(x) = 2r_0e^{r_0x} + r_0^2xe^{r_0x}$$

$$ay_1''(x)+by_1'(x)+cy_1(x)=(ar_0^2+br_0+c)te^{r_0x}+(2ar_0+b)e^{r_0x}.$$

Puisque r_0 est racine de $(E.C.)$ on a $ar_0^2+br_0+c=0$. De plus r_0 est racine double donc $r_0=-\dfrac{b}{2a}$, d'où $2ar_0+b=0$. Ainsi $ay_1''(x)+by_1'(x)+cy_1(x)=0$, et y_1 est solution de (E_0). Finalement toutes les fonctions de la forme $y(x)=\lambda xe^{r_0x}+\mu e^{r_0x}=(\lambda x+\mu)e^{r_0x}$ sont solutions.

Deuxième étape : Réciproquement, on montre que les solutions sont de la forme donnée.
On considère l'une des racines r_1 (dans le cas où $\Delta=0$, on pose $r_1=r_0$). La fonction $x\mapsto e^{r_1x}$ est alors une solution de (E_0). Soit y une autre solution et posons $g:x\mapsto\dfrac{y(x)}{e^{r_1x}}$.
Comme pour tout $x\in\mathbb{R}$, $y(x)=g(x)e^{r_1x}$ on déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$y'(x)=\big(g'(x)+r_1g(x)\big)e^{r_1x}\quad\text{et}\quad y''(x)=\big(g''(x)+2r_1g'(x)+r_1^2g(x)\big)e^{r_1x}$$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=\big(ag''(x)+(2ar_1+b)g'(x)+(ar_1^2+br_1+c)g(x)\big)e^{r_1x}$$

et cette expression est nulle puisque y est solution de (E_0). L'exponentielle ne s'annule jamais, c'est donc la parenthèse qui est nulle. Par ailleurs r_1 est racine de $(E.C.)$ donc $ar_1^2+br_1+c=0$.
On obtient donc simplement pour tout $x\in\mathbb{R}$, $ag''(x)+(2ar_1+b)g'(x)=0$. Posons $h=g'$ et divisons par a qui est non nul, on obtient

$$h'+\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)h=0$$

qui est une équation du premier ordre que l'on sait résoudre. Les solutions sont de la forme $h:x\mapsto ke^{-(2r_1+\frac{b}{a})x}$, $k\in\mathbb{R}$.
D'après les relations entre coefficients et racines, $\frac{b}{a}=-(r_1+r_2)$ d'où $-(2r_1+\frac{b}{a})=r_2-r_1$. Finalement h est de la forme $h(x)=ke^{(r_2-r_1)x}$, $k\in\mathbb{C}$.
Or g est une primitive de h donc on peut déterminer g par intégration :
◇ Si $r_2\neq r_1$, on trouve pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{k}{r_2-r_1}e^{(r_2-r_1)x}+\ell$ d'où

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y(x)=g(x)e^{r_1x}=\frac{k}{r_2-r_1}e^{r_2x}+\ell e^{r_1x},\ k,\ell\in\mathbb{C}$$

qui est bien de la forme annoncée avec $\lambda=\ell$ et $\mu=\dfrac{k}{r_2-r_1}$.
◇ Si $r_2=r_1=r_0$, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=k$ d'où $g(x)=kx+\ell$ et $y(x)=(kx+\ell)e^{r_0x}$ qui est bien de la forme annoncée.

□

Théorème 21 (Résolution de (E_0) dans $\mathbb{R}$)

◇ Si $(E.C.)$ a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les solutions de (E_0) sont de la forme

$$y_h:x\mapsto\lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_2x}\,,\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

◇ Si $(E.C.)$ a une racine double r_0, les solutions de (E_0) sont de la forme

$$y_h:x\mapsto(\lambda x+\mu)e^{r_0x}\,,\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

◇ Si $(E.C.)$ a deux racines complexes conjuguées $\alpha\pm i\beta$, les solutions de (E_0) sont de la forme

$$y_h:x\mapsto e^{\alpha x}\big(\lambda\cos(\beta x)+\mu\sin(\beta x)\big)\,,\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

Preuve : Les deux premiers cas sont identiques à la démonstration précédente. Il suffit donc de traiter le cas où $\Delta<0$. Dans ce cas l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées donc on connait les solutions à valeurs complexes. Pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & c_1e^{(\alpha+i\beta)x}+c_2e^{(\alpha-i\beta)x}\\ & = & e^{\alpha x}\big(c_1e^{i\beta x}+c_2e^{-i\beta x}\big)\\ & = & e^{\alpha x}\big((c_1+c_2)\cos(\beta x)+i(c_1-c_2)\sin(\beta x)\big)\quad\text{avec }(c_1,c_2)\in\mathbb{C}^2\end{array}$$

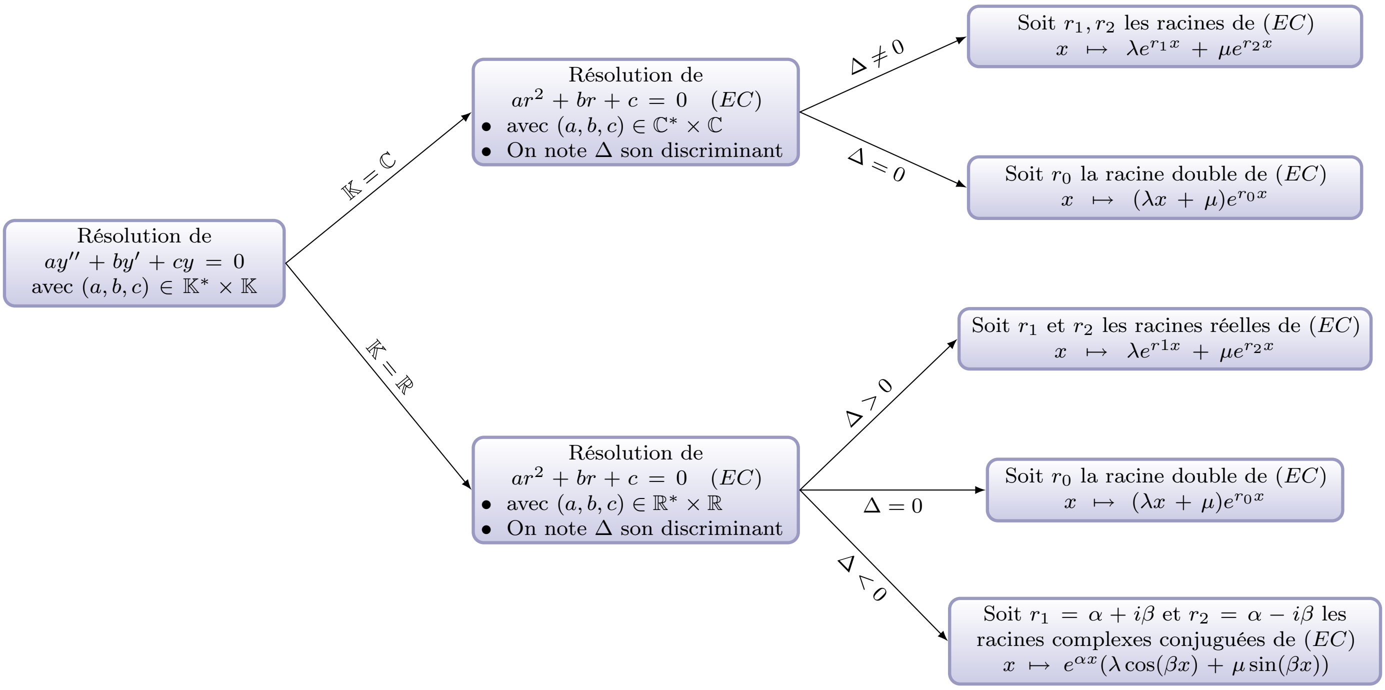
Il s'agit de déterminer, parmi ces solutions, lesquelles sont à valeurs réelles.

On a $y(0)=c_1+c_2$ et $y'(0)=c_1(\alpha+i\beta)+c_2(\alpha-i\beta)=\alpha(c_1+c_2)+i\beta(c_1-c_2)$.
Pour que $y(x)$ soit réel pour tout $x\in\mathbb{R}$, il est nécessaire que $y(0)\in\mathbb{R}$, d'où $c_1+c_2\in\mathbb{R}$, et que $y'(0)\in\mathbb{R}$, ce qui implique que $i(c_1-c_2)\in\mathbb{R}$.
Ainsi, si y est à valeurs réelles elle est de la forme

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y(x)=e^{\alpha x}\big(\lambda\cos(\beta x)+\mu\sin(\beta x)\big)\quad\text{avec }(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

et réciproquement si elle est de cette forme elle est bien à valeurs réelles.

□



Exemple : Soit $\omega > 0$, on considère l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ (oscillateur harmonique) :
L'équation caractéristique est $r^2 + \omega^2 = 0$, dont les racines sont $\pm i\omega$. On a donc $\alpha = 0$ et $\beta = \omega$.
Les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Elles peuvent également s'écrire sous la forme $x \mapsto C \cos(\omega x + \varphi)$ comme on l'a vu dans les chapitres précédents.

8.4.3 Recherche d'une solution particulière

Théorème 22

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$ des constantes avec $a \neq 0$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue.
L'équation différentielle $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$ admet au moins une solution. Plus précisément, pour $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x) & (E) \\ y(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(x_0) = y_1 & (CI) \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

Remarques :

1. Nous admettons ce résultat qui sera démontré en MP.
2. Ce résultat est rassurant puisqu'il assure l'existence d'une solution particulière. L'objet des paragraphes suivant est de donner des méthodes pour trouver une solution particulière pour f donnée.

On considère désormais l'équation avec second membre

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (E).$$

Le cas que nous allons considérer est celui où $x \mapsto f(x) = Ae^{\alpha x}$, où A et α sont deux constantes complexes.

Théorème 23 (Cas où $f : x \mapsto Ae^{\alpha x}$)

On considère l'équation $ay'' + by' + cy = Ae^{\alpha x} \quad (E)$.
Soit $(E.C.)$ l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.
◇ Si α n'est pas racine de $(E.C.)$ alors il existe une solution particulière de la forme

$$y_p : x \mapsto k\, e^{\alpha x} \quad \text{avec } k \in \mathbb{C}.$$

◇ Si α est racine simple de $(E.C.)$ alors il existe une solution particulière de la forme

$$y_p : x \mapsto k\, x\, e^{\alpha x} \quad \text{avec } k \in \mathbb{C}.$$

◇ Si α est racine double de $(E.C.)$ alors il existe une solution particulière de la forme

$$y_p : x \mapsto kx^2\, e^{\alpha x} \quad \text{avec } k \in \mathbb{C}.$$

Exemples :

1. Résolvons l'équation $y'' - y' - 2y = e^x \quad (E_1)$:
   ◇ Résolution de l'équation homogène $y'' - y' - 2y = 0$:
   L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$ dont les racines sont $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme :

   $$x \mapsto y_h(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

   ◇ Recherche d'une solution particulière :
   Le second membre est de la forme $x \mapsto Ae^{rx}$ avec $A = 1$ et $r = 1$ qui n'est pas solution de l'équation caractéristique. On va chercher une solution de la forme $x \mapsto ke^x$:

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p(x) = ke^x,\ y_p'(x) = ke^x,\ y_p''(x) = ke^x$$

   $$y_p''(x) - y_p'(x) - 2y_p(x) = -2ke^x$$

   La fonction y_p est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-2ke^x = e^x$.
   On en déduit que $-2k = 1$, d'où $k = -\frac{1}{2}$, donc une solution particulière est

   $$y_p : x \mapsto -\frac{1}{2}e^x.$$

   ◇ Finalement les solutions de (E_1) sont toutes les fonctions de la forme :

   $$y : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{2x} - \frac{1}{2}e^x, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Résolvons l'équation $y'' - y' - 2y = e^{-x} \quad (E_2)$:

   ◇ L'équation homogène est la même que dans l'exemple précédent, elle a pour solutions

   $$y_h : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

   ◇ Recherche d'une solution particulière de $y'' - y' - 2y = e^{-x}$:
   -1 est solution de l'équation caractéristique donc on va chercher une solution de la forme $y_p : x \mapsto kxe^{-x}$:

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = ke^{-x} - kxe^{-x} = k(1-x)e^{-x}, \quad y_p''(x) = k(-1)e^{-x} - k(1-x)e^{-x} = k(x-2)e^{-x}$$

$$y_p''(x) - y_p'(x) - 2y_p(x) = k\big(x - 2 - (1-x) - 2x\big)e^{-x} = -3ke^{-x}$$

La fonction y_p est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-3ke^{-x} = e^{-x}$. On trouve $-3k = 1$ d'où $k = -\dfrac{1}{3}$. Ainsi une solution particulière est

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{3}xe^{-x}.$$

⋄ Finalement les solutions de (E_2) sont toutes les fonctions de la forme :

$$y : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{2x} - \frac{1}{3}xe^{-x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Théorème 24 (Cas où $f : x \mapsto P(x)e^{\alpha x}$)

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Considérons l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = P(x)e^{\alpha x} \quad (E).$$

Soit $(E.C.)$ l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.
On cherchera une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto x^m Q(x)e^{\alpha x}$, où Q est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de même degré que P :

1. Si α n'est pas racine de $(E.C)$, alors $m = 0$.
2. Si α est une racine simple de $(E.C)$, alors $m = 1$.
3. Si α est une racine double de $(E.C)$, alors $m = 2$.

Exercice A13 : Résoudre les équations différentielles :

1. $y'' - 3y' + 2y = x$
2. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$
3. $y'' - 3y' + 2y = xe^{x}$
4. $y'' - 3y' + 2y = e^{x}$
5. $y'' - 3y' + 2y = (x^2+1)e^{2x}$
6. $y'' - 2y' + y = xe^{x}$
7. $y'' + 2y' + y = e^{x}$
8. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$
9. $y'' + y' - 2y = e^{x}$

Théorème 25 (Cas où $f : x \mapsto P(x)\cos(\omega x)$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $a, b, c, \omega \in \mathbb{R}$. Considérons l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = P(x)\cos(\omega x) \quad (E).$$

Soit $(E.C.)$ l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.
Pour déterminer une solution particulière de (E) :

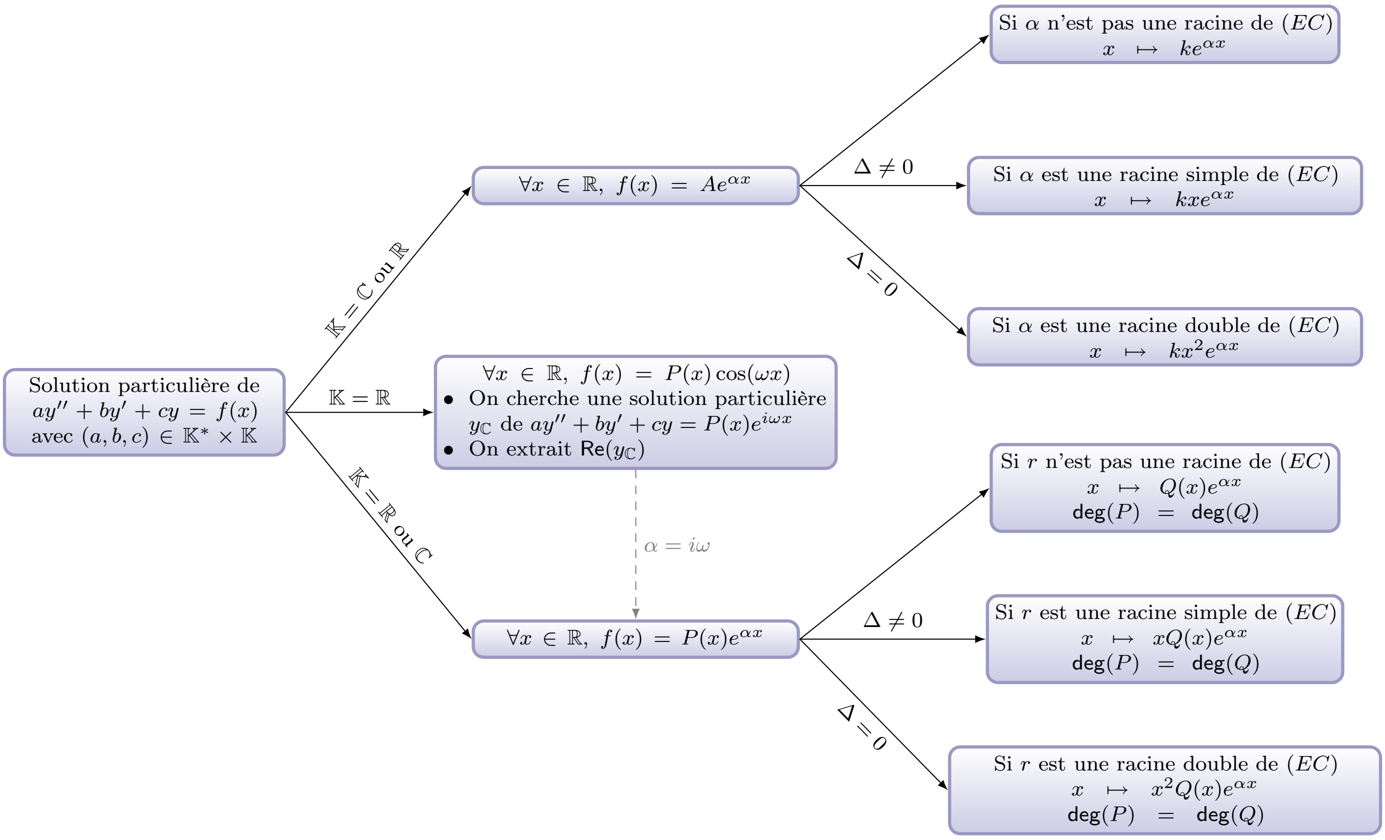
1. On trouve une solution complexe $y_{\mathbb{C}}$ de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = P(x)e^{i\omega x} \quad (E_{\mathbb{C}})$ à l'aide de la méthode précédente.
2. La fonction $\mathrm{Re}(y_{\mathbb{C}})$ est alors une solution réelle de (E).

Remarque : La méthode est identique dans le cas où $f : x \mapsto P(x)\sin(\omega x)$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Il suffit de considérer la partie imaginaire de $y_{\mathbb{C}}$

Exercice A14 : Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 2y = \sin(x)$. On donnera les solutions à valeurs réelles.

Exercice A15 : Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 13y = (12x+8)\cos(x) + (4x+2)\sin(x)$.

Exercice E16 : Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 2y' + 2y = e^{x}\sin(x)$. On donnera les solutions à valeurs réelles.



Proposition 26 (Principe de superposition)

Soit l'équation $ay'' + by' + cy = f(x) \quad (E)$.
On suppose que f se décompose comme somme de deux fonctions $f = f_1 + f_2$. Soit y_1 une solution particulière de $ay'' + by' + cy = f_1(x)$ et y_2 une solution particulière de $ay'' + by' + cy = f_2(x)$. Alors $y_p = y_1 + y_2$ est une solution particulière de (E).

Preuve : Par hypothèse, on a $ay_1'' + by_1' + cy_1 = f_1$ et $ay_2'' + by_2' + cy_2 = f_2$.
Par addition, on obtient bien $a(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)' + c(y_1 + y_2) = f_1 + f_2 = f$. □

Exemple : Résolvons l'équation (E) : $y'' - y' - 2y = 2\mathsf{ch}x$.
Le second membre s'écrit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\mathsf{ch}x = e^x + e^{-x}$.
Cela reprend les deux exemples précédents : les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y_h : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

et d'après le principe de superposition, une solution particulière s'obtient en additionnant les deux solutions particulières trouvées dans les exemples précédents :

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}\,x\,e^{-x}.$$

Finalement, les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme :

$$y : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{2x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}\,x\,e^{-x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice A17 : Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = \mathsf{ch}(x)$.

Exercice A18 : Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = e^x + (3x - 1)e^{2x} + x - 2$.

8.4.4 Conditions initiales

Soit l'équation $ay'' + by' + cy = f(x) \quad (E)$.

Théorème 27

Soient $(x_0, y_0, y_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution y de (E) telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

Exemple : Reprenons l'équation précédente $y'' - y' - 2y = 2\text{ch}x$ et cherchons l'unique solution telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$. En dérivant on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}x\,e^{-x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = -\lambda e^{-x} + 2\mu e^{2x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}x\,e^{-x}$$

d'où le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu - \frac{1}{2} & = & 1 \\ -\lambda + 2\mu - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & \frac{3}{2} \\ -\lambda + 2\mu & = & \frac{17}{6} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{18} \\ \mu = \frac{13}{9} \end{array}\right.$$

Finalement, l'unique solution au problème de Cauchy est donnée par

$$y : x \mapsto \frac{1}{18}e^{-x} + \frac{13}{9}e^{2x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}x\,e^{-x}.$$

8.4.5 Équations fonctionnelles

Exercice E19 : Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x).$$

Exercice E20 : Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que :

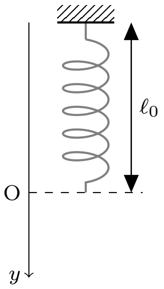
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -f(-x).$$

Exercice C21 : Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

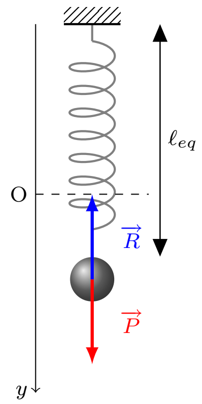
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x g(t)dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Montrer que f et g sont nulles sur $\mathbb{R}$.

8.5 Application à la physique : oscillateur harmonique simple ⇄



On considère un objet de masse m placé au bout d'un ressort à la verticale. On note k la constante de raideur du ressort (qui est strictement positive) et ℓ_0 la longueur à vide du ressort. On suppose le ressort émet une force proportionnelle à son allongement dont le coefficient de proportionnalité est k.



Premier cas : Étudions le cas d'équilibre. L'objet est en équilibre et la longueur du ressort en équilibre est alors ℓ_{eq} et on note y_{eq} l'ordonnée de l'objet par rapport à la longueur à vide du ressort.
La somme des forces s'exerçant sur l'objet est égal à zéro :

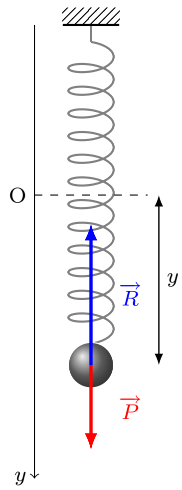
$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}$$

En projetant sur l'axe vertical dirigé vers le bas, on obtient :

$$0 = mg - k(\ell_{eq} - \ell_0)$$

$$0 = mg - k(y_{eq})$$

$$y_{eq} = \frac{mg}{k}$$



Deuxième cas : On déplace la masse de sa position d'équilibre. Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$m\frac{d^2y}{dt} = mg - ky$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = g.$$

On obtient une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
Effectuons le changement de variable : $z = y - y_{eq}$. Ici z correspond à l'écart algébrique par rapport à la position d'équilibre de l'objet (étudiée dans le premier cas).
On obtient :

$$\frac{d^2(z + y_{eq})}{dt^2} + \frac{k}{m}(z + y_{eq}) = g$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z + \frac{k}{m}\frac{mg}{k} = g$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega z = 0.$$

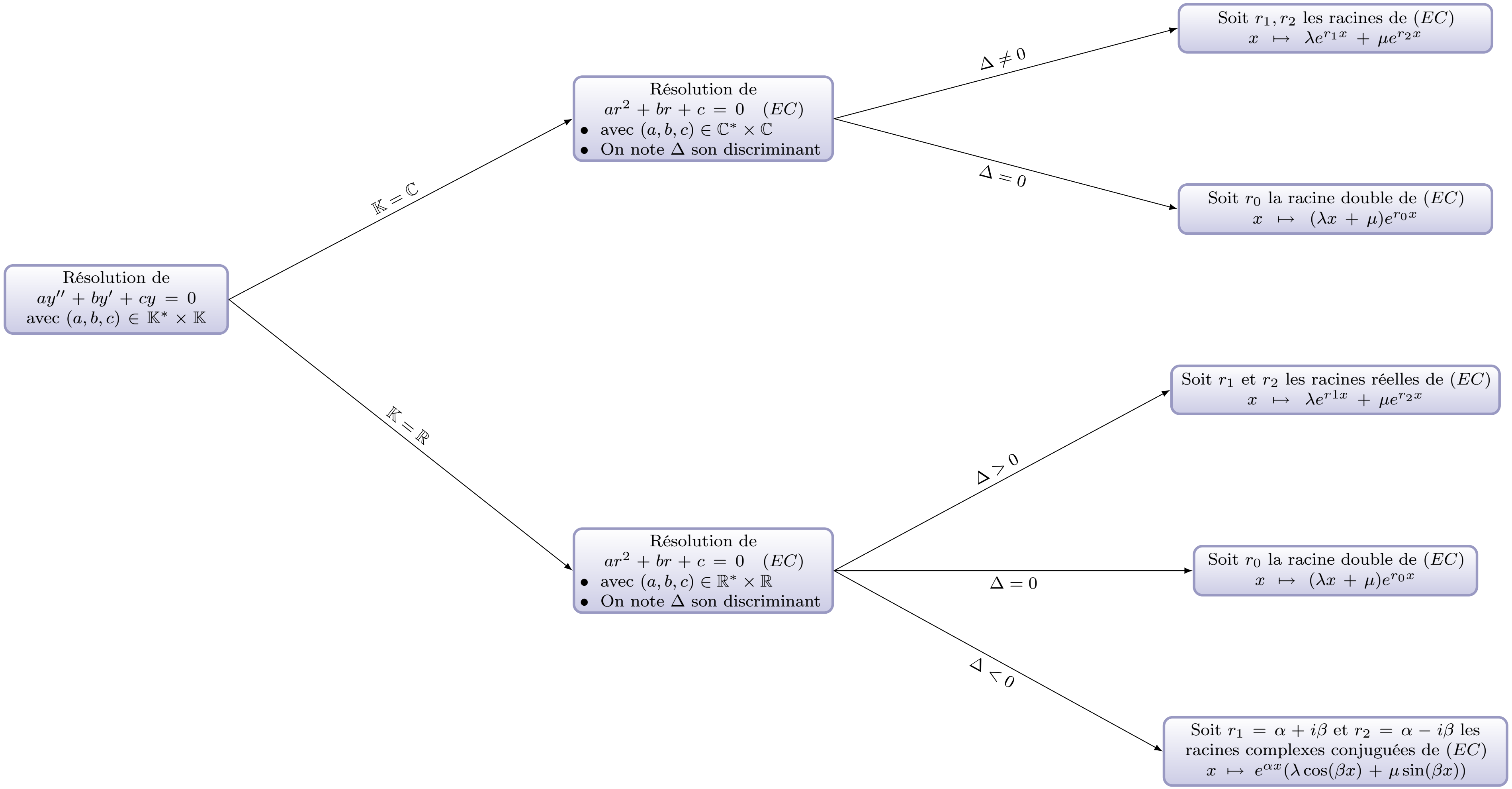
Posons $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$. En résolvant cette équation différentielle, on sait qu'il existe deux constantes réelles A et B telles que :

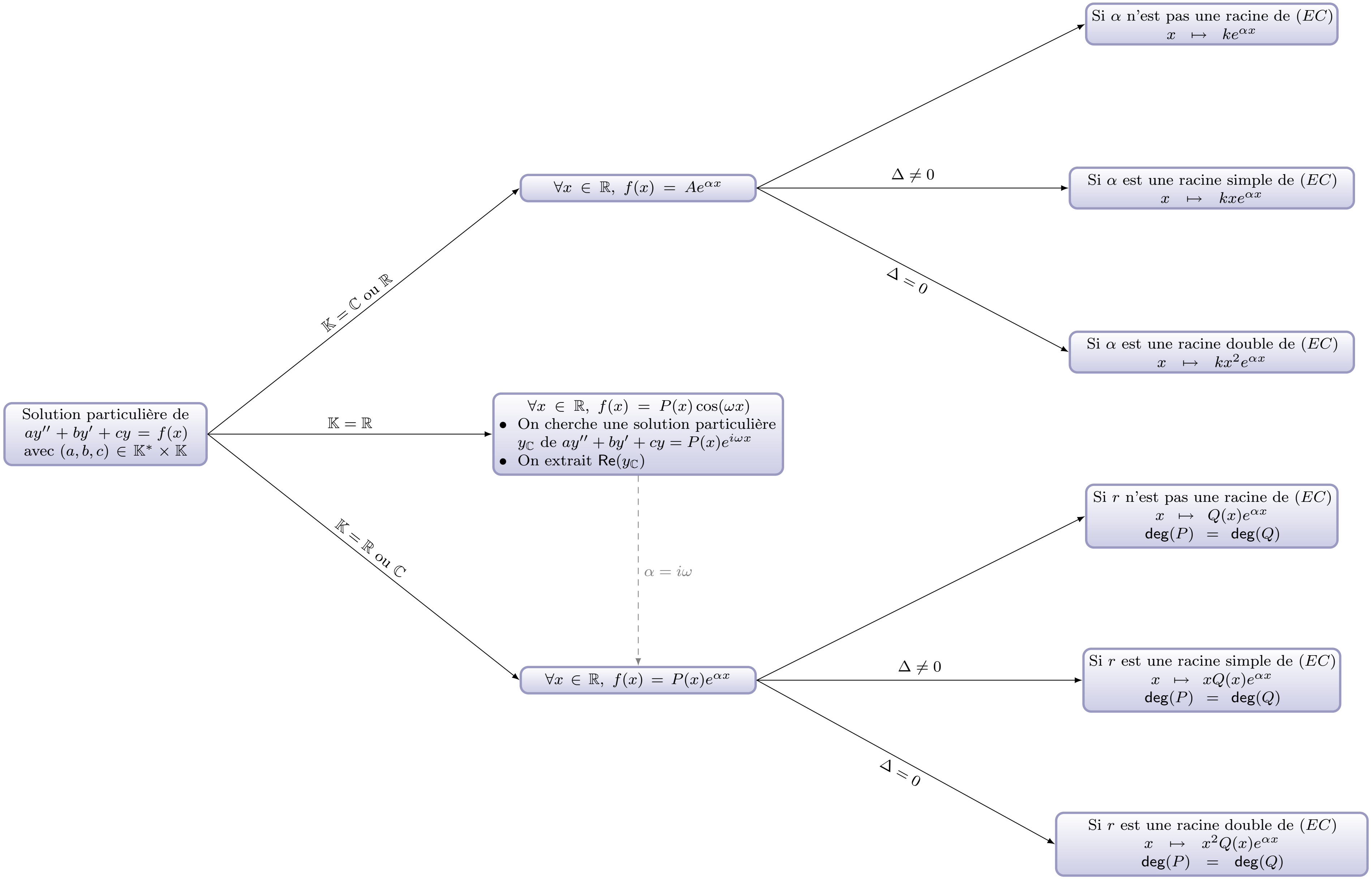
$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad z(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Rappelons que la transformation phase amplitude permet d'écrire :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad z(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t - \phi).$$

On obtient un mouvement oscillatoire dont les caractéristiques sont données par les conditions initiales.


Résolution de
$ay'' + by' + cy = 0$
avec $(a,b,c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$
Résolution de
$ar^2 + br + c = 0 \quad (EC)$
• avec $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$
• On note Δ son discriminant
$\Delta \neq 0$
Soit r_1, r_2 les racines de (EC)
$x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$
$\Delta = 0$
Soit r_0 la racine double de (EC)
$x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}$
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$
Résolution de
$ar^2 + br + c = 0 \quad (EC)$
• avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
• On note Δ son discriminant
$\Delta > 0$
Soit r_1 et r_2 les racines réelles de (EC)
$x \mapsto \lambda e^{r1 x} + \mu e^{r_2 x}$
$\Delta = 0$
Soit r_0 la racine double de (EC)
$x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}$
$\Delta < 0$
Soit $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ les
racines complexes conjuguées de (EC)
$x \mapsto e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$


Solution particulière de $ay'' + by' + cy = f(x)$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = Ae^{\alpha x}$
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = P(x)\cos(\omega x)$
• On cherche une solution particulière $y_{\mathbb{C}}$ de $ay'' + by' + cy = P(x)e^{i\omega x}$
• On extrait $\mathsf{Re}(y_{\mathbb{C}})$
$\alpha = i\omega$
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = P(x)e^{\alpha x}$
$\Delta \neq 0$
$\Delta = 0$
Si α n'est pas une racine de (EC) $x \mapsto ke^{\alpha x}$
Si α est une racine simple de (EC) $x \mapsto kxe^{\alpha x}$
Si α est une racine double de (EC) $x \mapsto kx^2e^{\alpha x}$
$\Delta \neq 0$
$\Delta = 0$
Si r n'est pas une racine de (EC) $x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$ $\mathsf{deg}(P) = \mathsf{deg}(Q)$
Si r est une racine simple de (EC) $x \mapsto xQ(x)e^{\alpha x}$ $\mathsf{deg}(P) = \mathsf{deg}(Q)$
Si r est une racine double de (EC) $x \mapsto x^2Q(x)e^{\alpha x}$ $\mathsf{deg}(P) = \mathsf{deg}(Q)$