Chapitre 14

Les matrices

Sommaire

La théorie des matrices joue un rôle fondamental en mathématiques et dans les applications en sciences. Le but de ce chapitre est d'introduire le calcul matriciel et les opérations classiques que l'on peut effectuer sur les matrices. Cela nous fournira des premiers exemples de structures algébriques non commutatives. Nous verrons plus tard le lien fondamental entre matrices et applications linéaires. Nous étudierons dans un chapitre ultérieur la théorie des systèmes linéaires et l'algorithme du pivot de Gauss.

14.1 Un peu d'histoire des matrices

Donnons quelques moments clés de la théorie des matrices qui montrent leur influence sur notre monde contemporain :

- ≈ 100 - Chiu Chang Suan Shu écrit "Les neufs chapitre de l'art mathématique". C'est le premier texte connu traitant de matrices et de déterminants pour résoudre un système d'équations linéaires.
- 1693 - Leibniz (1646-1716) développe la théorie des déterminants pour résoudre les équations linéaires.
- 1750 - Cramer (1704-1752) poursuit les travaux de Leibniz et établit la méthode dite de Cramer.
- Vers 1800, Gauss (1777-1855) et Jordan (1838-1922) mettent au point de la méthode d'élimination de Gauss-Jordan.
- 1850 - James Joseph Sylvester (1814-1897) utilise un rangement en ligne et colonne, et effectue un calcul de déterminant pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. Il emploie le mot matrice pour la première fois dans l'histoire.
- 1855 - Arthur Cayley (1821-1895), assistant de Sylvester confirme le nom de matrice dans le sens actuel ("A Memoir on the Theory of Matrices")
- Par la suite Hamilton, Hermann Grassmann, Frobenius et John von Neumann ont contribué à développer la théorie des matrices.
- 1925 - Werner Karl Heisenberg (1901-1976) formule les bases de la mécanique quantique à l'aide de la théorie des matrices. L'état quantique d'un système quantique est représenté par une matrice densité.
- Vers 1940, la mathématicienne Olga Taussky Tood (1906-1995) utilise la théorie des matrices à la conception des avions (analyse des modes vibratoires).
- 1998 - Larry Page et Sergeï Brin mettent au point l'algorithme Pagerank en introduisant la matrice Google et en utilisant le théorème de Perron-Froebenius.

14.2 Généralités

La lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$. Nous verrons que l'on peut prendre pour $\mathbb{K}$ tout corps (structure que l'on définira plus tard). Les lettres n, m, p, q, k, l désigne des entiers naturels non nuls.

14.2.1 Définitions et vocabulaire

Définition 1

Une matrice de taille (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est la donnée d'une application de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des matrices de taille (n,p) à coefficient dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
Un élément $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est représenté par un tableau rectangulaire possédant n lignes et p colonnes. Le coefficient $a_{i,j}$ se trouve à la ligne i et à la colonne j.

$$A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Rédaction

1. Les notations A, $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, $(a_{i,j})$ désignent une matrice. Dans le cas des deux dernières notations, ne pas oublier les parenthèses.
2. Par contre, la notation sans parenthèses : $a_{i,j}$ désigne le coefficient de la matrice à la ligne i et colonne j, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{K}$. Le coefficient $a_{i,j}$ est parfois noté $A_{i,j}$ ou $[A]_{i,j}$.
3. On note indifféremment a_{ij} au lieu de $a_{i,j}$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.

Définition 2

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Soit $i \in [\![1,n]\!]$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de A est $\begin{pmatrix} a_{i1} \dots \dots a_{ip} \end{pmatrix}$.
2. Soit $j \in [\![1,p]\!]$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de A est $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.

Exemple : Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 9 & -1 & \pi \end{pmatrix}$. Alors $A \in M_{2,4}(\mathbb{R})$, $a_{2,4} = \pi$. La deuxième ligne de A est $\begin{pmatrix} 3 & 9 & -1 & \pi \end{pmatrix}$. La quatrième colonne de A est $\begin{pmatrix} 6 \\ \pi \end{pmatrix}$.

Définition 3

1. Les matrices de taille (n,n) à coefficient dans $\mathbb{K}$ sont appelées matrices carrée d'ordre n. L'ensemble de ces matrices est noté $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$ pour alléger la notation.
2. Les matrices de $M_{n,1}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire de taille $(n,1)$ sont appelées matrices colonnes de tailles n.
3. Les matrices de $M_{1,p}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire de taille $(1,p)$ sont appelées matrices lignes de taille p.
4. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, les coefficients diagonaux de A sont $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots a_{n,n}$.
5. L'ensemble des matrices de $M_{1,1}(\mathbb{K})$ est identifié à $\mathbb{K}$.
   Une matrice $(a_{1,1})$ de $M_1(\mathbb{K})$ sera tout simplement notée $a_{1,1}$.

Définition 4

Deux matrices A et B sont égales si, et seulement si, elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux. On note $A = B$.

14.2.2 Quelques matrices remarquables

Définition 5

La matrice unité (ou identité) est la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ notée I_n dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1, les autres coefficients étant nuls.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 6

La matrice nulle de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice notée $0_{M_{n,p}(\mathbb{K})}$ contenant des 0 partout :

$$0_{M_{n,p}(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque : La matrice nulle est parfois notée tout simplement 0, lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.

Définition 7

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on dit que la matrice A est :

1. scalaire si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$,
2. diagonale si, et seulement si, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_{nn} \end{pmatrix}$
3. triangulaire supérieure si, et seulement si, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_{nn} \end{pmatrix}$, ce qui revient à dire que :
$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i > j \implies a_{ij} = 0.$$
4. triangulaire inférieure si, et seulement si, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & (0) \\ & \ddots & \\ (*) & & a_{nn} \end{pmatrix}$, ce qui revient à dire que :
$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i < j \implies a_{ij} = 0.$$
5. symétrique si, et seulement si, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\quad a_{ij} = a_{ji}$.
6. antisymétrique si, et seulement si, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\quad a_{ij} = -a_{ji}$.

Exemples :

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est symétrique.
2. La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & -4 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarque : Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique $A \in M_n(\mathbb{K})$ sont toujours nuls, car :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (a_{i,i} = -a_{i,i} \implies a_{i,i} = 0).$$

14.2.3 Structure d'espace vectoriel de $M_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 8

L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{K})$ peut être muni de deux lois $(+, \cdot)$ définies comme ci-dessous.
Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}, B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})$$

Nous verrons que ces deux lois confèrent à $M_{n,p}(\mathbb{K})$ une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemples : Calculons :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & 4 & 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ \frac{1}{3} & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Proposition 9 (Règles de calcul pour l'addition matricielle)

Soit $A, B, C \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On a les égalités suivantes :

1. $A + B = B + A$ (l'addition matricielle est commutative)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (l'addition matricielle est associative)
3. $A + 0 = 0 + A = A$. (la matrice nulle est un élément neutre pour l'addition)
4. $A + (-1 \cdot A) = (-1 \cdot A) + A = 0$ (toute matrice admet une matrice opposée)

Remarque : La matrice $(-1)A$ est notée tout simplement $-A$. La différence $A - B$ est tout simplement $A + (-B)$.

Proposition 10 (Règles de calcul)

Soit $A, B, C \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a les égalités suivantes :

1. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
2. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
3. $\lambda(\mu A) = (\lambda \times \mu)A$.
4. $1.A = A$.

Définition 11

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ contenant des 0 partout exceptée à la ligne i et à la colonne j où se trouve un 1, est notée E_{ij}.

Exemple : Donnons dans $M_{2,3}(\mathbb{R})$ les matrices $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,2]\!]\times[\![1,3]\!]}$:

$$E_{1,1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad E_{1,2}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad E_{1,3}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$E_{2,1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad E_{2,2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad E_{2,3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Théorème 12

1. Soit $A=(a_{ij})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice A se décompose de manière unique sous la forme :

$$A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}a_{ij}E_{ij}.$$

2. La famille $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est appelée base canonique de $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple : Considérons la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&0\end{pmatrix}$. On a la décomposition suivante dans la base canonique :

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\A&=1\cdot E_{1,1}+2E_{1,2}+3E_{1,3}-E_{2,1}+2E_{2,2}+0\cdot E_{2,3}.\end{aligned}$$

Remarques :

1. La base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ est $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$.

   Tout vecteur colonne $C=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$ se décompose dans la base canonique de la manière suivante :

$$C=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+c_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

2. De même, la base canonique de $M_{1,n}(\mathbb{K})$ est $\left(\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\right)$.
   Tout vecteur ligne $L=\begin{pmatrix}l_1&l_2&\cdots&l_n\end{pmatrix}$ se décompose dans la base canonique de la manière suivante :

$$L=l_1\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\end{pmatrix}+l_2\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\end{pmatrix}+\cdots+l_n\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

14.3 Produit matriciel

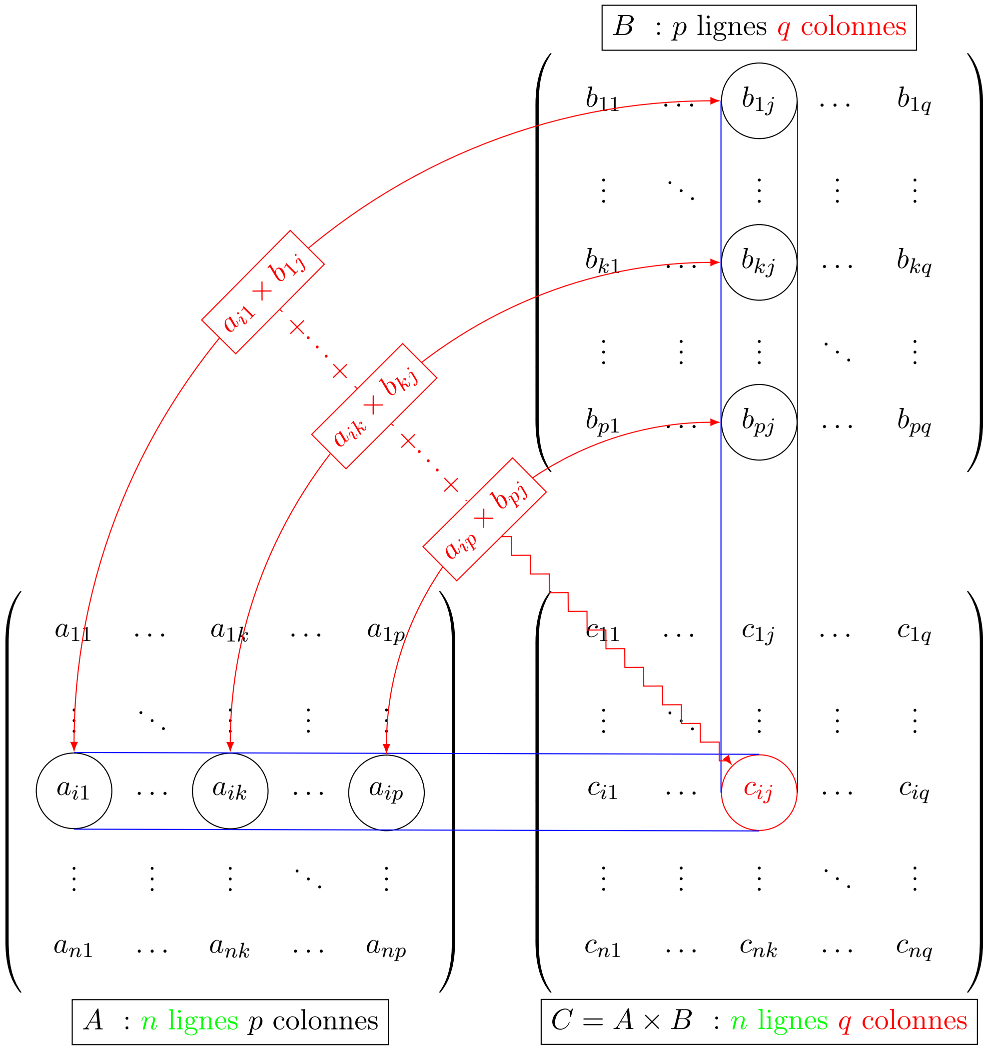
14.3.1 Règles de calculs et avertissements

Définition 13 (Important)

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})$ une matrice de $M_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit de A par B est la matrice C de $M_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.}$$

Le produit est noté AB.



Remarques : Trois mises en garde

1. Le produit AB n'est défini qu'à la condition où le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

   Matrice de taille (n,p) $\times$ Matrice de taille (p,q) $=$ Matrice de taille (n,q)

   En particulier, le produit de deux matrices carrées d'ordre n est encore une matrice d'ordre n.

2. Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, on peut définir les produits AB et BA, ce sont des matrices de $M_n(\mathbb{K})$. Mais en général :

$$AB \neq BA.$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Le fait qu'un produit de matrices AB soit égal à la matrice nulle n'implique pas que l'une des matrices soit nulle. En effet :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et pourtant $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice A1 : Calculer les produits AB et BA dans les trois cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $A = (1)$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice A2 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $M(x) = \begin{pmatrix} \mathsf{ch}(x) & \mathsf{sh}(x) \\ \mathsf{sh}(x) & \mathsf{ch}(x) \end{pmatrix}$ Pour $x, y \in \mathbb{R}$, simplifier le produit matriciel $M(x)M(y)$.

Exercice E3 : On dit qu'une matrice carrée est stochastique si, et seulement si, tous ses coefficients sont supérieurs ou égaux à 0 et que la somme des coefficients de chaque ligne est égal à 1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.

Exercice E4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère dans $M_n(\mathbb{R})$ les matrices de $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ définies par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad a_{i,j} = i + j \quad \text{et} \quad b_{i,j} = i - j.$$

Calculer le terme général de la matrice $D = AB$.

Proposition 14 (Règles de calculs)

1. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{q,l}(\mathbb{K})$, on a $(AB)C = A(BC)$ (associativité).
2. Soit $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C, D \in M_{p,q}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a la bilinéarité :

$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC \quad \text{et} \quad B(\lambda C + \mu D) = \lambda BC + \mu BD.$$

3. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on a : $AI_p = I_n A = A$.
   La matrice identité est un élément neutre pour la multiplication matricielle.

Exercice A5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $J = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ contenant des 1 partout. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $\sigma(A)$ la somme de tous les coefficients de A. Exprimer JAJ en fonction de $\sigma(A)$ et J

Exercice A6 : Déterminer les matrices de $M_4(\mathbb{K})$ qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

14.3.2 Produit de matrices élémentaires

Notation 15 (de Kronecker)

Soit $a, b \in \mathbb{C}$, on définit le symbole de Kronecker par :

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

Proposition 16

Le terme générale de la matrice I_n est : $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Proposition 17

Considérons la matrice élémentaire $E_{k,l}$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ qui ne contient que des 0 sauf à la ligne k et à la colonne l où se trouve un 1. On peut exprimer le terme général de $E_{k,l}$ à l'aide de symboles de Kronecker :

$$E_{k,l} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} \, .$$

Proposition 18 (Produit de matrices élémentaires)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k, l, p, q \in [\![1, n]\!]$. On considère les matrices élémentaires $E_{k,l}$ et $E_{p,q}$ de $M_n(\mathbb{K})$. On a alors l'égalité suivante :

$$E_{k,l}E_{p,q} = \delta_{l,p}E_{k,q}.$$

<u>Exercice E7</u> : [Centre de $M_n(\mathbb{C})$]
Le but de cet exercice est de déterminer le centre de $M_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices :

$$Z_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ AM = MA\}.$$

1. Soit A une matrice de $Z_n(\mathbb{C})$. Soit $k, l \in [\![1, n]\!]$, on sait que $E_{kl}A = AE_{kl}$
   (a) Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, calculer $[E_{k,l}A]_{i,j}$ et $[AE_{k,l}]_{i,j}$.
   (b) En déduire que :
   $$\forall k, l \in [\![1, n]\!], \quad a_{kk} = a_{ll}$$
   $$\forall i, l \in [\![1, n]\!], \quad i \neq l \implies a_{il} = 0$$
2. Conclure.

<u>Exercice E8</u> : [Matrices de transvection]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p, q \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$. On définit la matrice de transvection $T_{p,q}(\lambda)$ par :

$$T_{p,q}(\lambda) = I_n + \lambda E_{p,q}.$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer $AT_{p,q}(\lambda)$ et $T_{p,q}(\lambda)A$. Interpréter le résultat trouvé. (Indication : On décomposera A dans la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.)

14.3.3 Puissance de matrices carrées

Notation 19 (Notation multiplicative)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On notera pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$A^p = \underbrace{A \dots A}_{p \text{ fois}} \quad \text{et} \quad A^0 = I_n$$

Exemple : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_n^k = I_n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0_{M_n(\mathbb{K})}^k = 0_{M_n(\mathbb{K})}$.

Exemple : Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Calculons pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p.

Calculons en premier lieu A^2, A^3 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}.$$

On conjecture que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = \begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1} \\ 0 & a^p \end{pmatrix}$.

Notons pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{H}_p : \quad A^p = \begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1} \\ 0 & a^p \end{pmatrix}.$$

Initialisation : On vérifie que $\mathcal{H}_0$ est vraie. En effet

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 & 0a^{-1} \\ 0 & a^0 \end{pmatrix}.$$

Hérédité : Supposons que la propriété $\mathcal{H}_p$ soit vraie pour un entier naturel p fixe mais quelconque. Montrons alors que $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie. Évaluons :

$$A^{p+1} = A^p A = \begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1} \\ 0 & a^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{p+1} & (p+1)a^p \\ 0 & a^{p+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.
La récurrence est ainsi faite. On en déduit que :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1} \\ 0 & a^p \end{pmatrix}.}$$

Exercice A9 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $J \in M_n(\mathbb{R})$ contenant des 1 partout :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, J^p.

Exercice A10 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(R_\theta)^n$.

Exercice E11 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, calculer A^n
2. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par la donnée de u_0 et v_0 et les relations :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n - v_n \\ v_{n+1} &= -u_n + v_n \end{cases}$$

   (a) On pose $W_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$. Établir une relation entre W_{n+1}, A et W_n.

   (b) En déduire une expression de u_n et de v_n en fonction de u_0 et v_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice E12 : Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$L = AL + B.$$

On définit la suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $M_n(\mathbb{R})$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} U_0 \in M_n(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n + B \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$U_n = L + A^n\left(U_0 - L\right).$$

Exercice E13 : Déterminer les matrices A de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = I_2$.

Exercice A14 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. Montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0_{M_2(\mathbb{K})}$.

Théorème 20 (Formule du binôme de Newton)

Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit A, B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent c'est-à-dire telles que $\boxed{AB = BA}$, alors :

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}.$$

Remarque : On utilise souvent cette formule dans le cas où l'une des matrices est la matrice unité I_n, car cela assure directement la condition $AB = BA$.

Exemple : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{cases} (A+I_n)^2 = A^2 + 2A + I_n \\ (A+I_n)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I_n \end{cases}$$

Exercice E15 : On considère la matrice $J \in M_3(\mathbb{R})$ définie par $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, J^k.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p.

Théorème 21 (Formule de factorisation)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit A, B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent c'est-à-dire telles que $\boxed{AB = BA}$, alors :

$$A^p - B^p = (A-B)\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\right) = \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\right)(A-B).$$

Remarque : Comme pour la formule du binôme de Newton, on utilise souvent cette formule dans le cas où l'une des matrices est la matrice unité I_n, car cela assure directement la condition $AB = BA$.

Exemple : Soit $p \in \mathbb{N}^*$,

$$A^p - I_n = A^p - I_n^p = (A - I_n)\left[\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right] = \left[\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right](A - I_n).$$

14.4 Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$

Définition 22 (Inverse d'une matrice)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible si, et seulement si, il existe un élément $A' \in M_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$AA' = A'A = I_n.$$

La matrice A' est appelée inverse de A et on le note A^{-1}.

Théorème 23

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si la matrice A est inversible alors son inverse est unique.

Exercice A16 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 + A - 6I_n = 0_{M_n(\mathbb{K})}$. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse en fonction de A.

Exercice E17 : Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer les inverses :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice A18 : On dit qu'une matrice M de $M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si, et seulement si, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0_{M_n(\mathbb{K})}$.

1. On pose $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de N_2. La matrice N_2 est-elle inversible ?
2. On pose $N_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de N_3. La matrice N_3 est-elle inversible ?
3. Soit N une matrice carrée d'ordre n nilpotente. Montrer que $(I_n - N)$ est une matrice inversible et donner son inverse.

Définition 24

L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$. Cet ensemble s'appelle groupe linéaire de $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition 25

1. Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, alors AB est inversible :
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$
2. De manière générale, si $A_1, A_2, \ldots, A_p \in GL_n(\mathbb{K})$, le produit $A_1A_2\ldots A_p$ est inversible et :
$$(A_1A_2\ldots A_p)^{-1} = A_p^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$$
3. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $\quad (A^{-1})^{-1} = A$.
4. La matrice identité est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.
5. Soit $k \in \mathbb{N}$. La notation multiplicative peut être généralisée :
$$A^{-k} = \underbrace{A^{-1}\ldots A^{-1}}_{k \text{ fois}} = (A^k)^{-1}.$$

Exercice A19 : Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Pourquoi la notation fractionnaire $\dfrac{A}{B}$ n'a AUCUN SENS pour des matrices ?

Rappelons que si $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$, l'égalité $AB = AC$ n'implique pas nécessairement que $B = C$. En effet, en prenant :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$$
En revanche, si A est une matrice inversible, la simplification fonctionne :

Proposition 26 (Simplification par une matrice inversible)

Soit $B, C \in M_n(\mathbb{K})$. Soit $\boxed{A \in GL_n(\mathbb{K})}$. Si on a l'égalité $AB = AC$ alors on a l'égalité : $B = C$.

Théorème 27 (Critère d'inversibilité à droite (admis pour l'instant))

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si, et seulement si, il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$. Dans ce cas, $A^{-1} = B$.

Théorème 28 (Critère d'inversibilité à gauche (admis pour l'instant))

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si, et seulement si, il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$. Dans ce cas, $A^{-1} = B$.

Exercice A20 : Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A + AB = I_n$. Montrer que A et B commutent.

Exercice E21 : Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B = AB$. Montrer que A et B commutent.

14.4.1 Inverses de matrices remarquables

Proposition 29 ((admis pour l'instant))

Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, tous ses éléments diagonaux sont tous non nuls. L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure) est une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure).

Soit $T = \begin{pmatrix} t_{11} & & & (*) \\ & t_{22} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & t_{nn} \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_{11}} & & & (*') \\ & \frac{1}{t_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \frac{1}{t_{nn}} \end{pmatrix}$.

<u>*Exemple*</u> : Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

La matrice A est triangulaire supérieure. En outre, les coefficients diagonaux de A sont tous non nuls, on en déduit que la matrice A est inversible. L'inverse de A est de la forme :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & \frac{1}{2} & c \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

où a, b, c sont à déterminer à l'aide de l'équation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & \frac{1}{2} & c \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & a+\frac{1}{2} & b+c \\ 0 & 1 & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b + c = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

En conclusion, A est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.}$$

Proposition 30

Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & (0) \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & d_n \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{K})$. La matrice D est inversible si, et seulement si, pour tous les $i \in [\![1, n]\!]$, $d_i \neq 0$. Dans ce cas l'inverse de D est $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & & (0) \\ & \frac{1}{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$.

Proposition 31 (Inversibilité d'une matrice de $M_2(\mathbb{K})$)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$, la matrice A est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, l'inverse de A est $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exercice A22 : Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Exemple : Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Calculons pour tout $\boxed{p \in \mathbb{Z}}$, A^p. On sait déjà que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1} \\ 0 & a^p \end{pmatrix}.$$

Remarquons que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a^p \times a^p - 0 \times pa^{p-1} = a^{2p} \neq 0,$$

donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, la matrice A^p est inversible et :

$$(A^p)^{-1} = \frac{1}{a^{2p}} \begin{pmatrix} a^p & -pa^{p-1} \\ 0 & a^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-p} & -pa^{-p-1} \\ 0 & a^{-p} \end{pmatrix}.$$

Or, on a l'égalité : $A^{-p} = (A^p)^{-1}$. On en déduit que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^{-p} = \begin{pmatrix} a^{-p} & -pa^{-p-1} \\ 0 & a^{-p} \end{pmatrix}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{Z}, \quad A^p = \begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1} \\ 0 & a^p \end{pmatrix}.}$$

Exercice A23 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(R_\theta)^n$.

14.4.2 Lien avec les systèmes linéaires

Nous donnons quelques liens avec les résolutions des systèmes linéaires. Nous étudierons dans un chapitre ultérieur la résolution complète de ces derniers.
Considérons le système linéaire à n équations et p inconnues $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$:

$$(S) \left\{ \begin{array}{cccccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \cdots & +a_{1p}x_p & = & b_1 & & (L_1) \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \cdots & +a_{2p}x_p & = & b_2 & & (L_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots & & \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & \cdots & +a_{ip}x_p & = & b_i & & (L_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots & & \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & \cdots & +a_{np}x_p & = & b_n & & (L_n) \end{array} \right.$$

où $(a_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ et $(b_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.
En posant $A = (a_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$, $B = (b_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $X = (x_j)_{j \in [\![1,p]\!]}$, on peut réécrire ce système sous la forme de l'équation matricielle d'inconnue X suivante :

$$\boxed{AX = B.}$$

Traitons le cas où $n = p$. On alors $A \in M_n(\mathbb{K})$, $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$:

Théorème 32

Si A est une matrice inversible, l'équation matricielle $AX = B$ admet une unique solution qui est $X = A^{-1}B$.

Remarque : Nous verrons plus tard que si A n'est pas inversible, l'équation matricielle admet une infinité de solutions ou aucune.

14.5 Transposée d'une matrice

Définition 33

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, la transposée de A est la matrice de $M_{p,n}(\mathbb{K})$ notée ${}^tA$ dont le terme générale est égale à (a_{ji}) En d'autres termes :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad [{}^tA]_{i,j} = [A]_{j,i}.$$

Remarque : La $i^{\text{ème}}$ ligne de ${}^tA$ est la $i^{\text{ème}}$ colonne de A.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Les transposées sont :

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^tB = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad {}^tC = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple : Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Calculons ${}^tXY$ et $X{}^tY$.

Remarquons en premier lieu que ${}^tX \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ et $Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Donc ${}^tXY \in M_{1,1}(\mathbb{K})$. En d'autres termes, ${}^tXY \in \mathbb{K}$.

$${}^tXY = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k.$$

Remarquons que $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et ${}^tY \in M_{1,n}(\mathbb{K})$. Donc $X{}^tY \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$X{}^tY = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \dots & x_1y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix} = (x_iy_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}.$$

Théorème 34

1. La transposition est une application linéaire de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $M_{p,n}(\mathbb{K})$. En d'autres termes pour tout $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA.$$

2. Pour tout $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^t({}^tA) = A$.
3. Pour tout $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$:

$${}^t(AB) = {}^tB{}^tA.$$

4. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a l'équivalence suivante :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff {}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$$

et dans ce cas : $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Proposition 35

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$,

1. La matrice A est symétrique si, et seulement si, ${}^tA = A$.
2. La matrice A est antisymétrique si, et seulement si, ${}^tA = -A$.

Exercice A24 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A, B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ symétriques. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que AB soit aussi symétrique.

Exercice A25 : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (X,Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \times M_{p,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAY = 0$$

Montrer que $A = 0_{M_{n,p}(\mathbb{R})}$.

Théorème 36

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$. Toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. En d'autres termes :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \quad \exists!(S,A) \in S_n(\mathbb{R}) \times A_n(\mathbb{R}), \quad M = S + A.$$

14.6 Trace d'une matrice carrée

Définition 37

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. La trace d'une matrice est la somme des éléments diagonaux de A. Elle est noté $\mathsf{Tr}(A)$.

$$\mathsf{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 8 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Alors $\mathsf{Tr}(A) = 1 - 5 + 3 = -1$.

$$\mathsf{Tr}(I_n) = \mathsf{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = n.$$

$$\mathsf{Tr}(0_{M_n(\mathbb{K})}) = \mathsf{Tr}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Exercice E26 : Résoudre l'équation $\mathsf{Tr}({}^tAA) = 0$ d'inconnue $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Théorème 38

L'application $\mathsf{Tr} : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$. En d'autres termes :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \mathsf{Tr}(\lambda A + B) = \lambda \,\mathsf{Tr}(A) + \mathsf{Tr}(B).$$

Preuve : Rappelons que $\lambda A + B = (\lambda a_{i,j} + b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Par définition de la trace :

$$\mathsf{Tr}(\lambda A + B) = \sum_{p=1}^{n} (\lambda a_{p,p} + b_{p,p}) = \lambda \sum_{p=1}^{n} a_{p,p} + \sum_{p=1}^{n} b_{p,p} = \lambda \,\mathsf{Tr}(A) + \mathsf{Tr}(B).$$

Ainsi Tr est bien une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$. $\square$

Théorème 39 (Circularité de la trace)

Pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{K})$,

$$\mathsf{Tr}(AB) = \mathsf{Tr}(BA).$$

Preuve : Notons $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = AB$ et $D = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = BA$. On a donc :

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \quad \text{et} \quad d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j}.$$

En utilisant la définition de la trace,

$$\mathsf{Tr}(AB) = \mathsf{Tr}(C) = \sum_{p=1}^{n} c_{p,p} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{p,k} b_{k,p} \quad \text{et} \quad \mathsf{Tr}(BA) = \mathsf{Tr}(D) = \sum_{p=1}^{n} d_{p,p} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{p,k} a_{k,p}.$$

En échangeant le nom des indices : $k \leftrightarrow p$ dans la dernière somme (ce qui est possible les variables étant muettes), on obtient :

$$\mathsf{Tr}(BA) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} b_{k,p} a_{p,k} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{k,p} a_{p,k}.$$

La dernière égalité est obtenue après interversion des sommes finies. On constate que :

$$\boxed{\mathsf{Tr}(AB) = \mathsf{Tr}(BA).}$$

$\square$

Remarque : ⚠ En général, $\mathsf{Tr}(AB) \neq \mathsf{Tr}(A)\,\mathsf{Tr}(B)$ En effet, considérons les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Évaluons le produit : $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Par conséquent :

$$\mathsf{Tr}(AB) = 2 + 1 = 3$$

et pourtant

$$\mathsf{Tr}(A) = 2 \qquad \text{et} \qquad \mathsf{Tr}(B) = 2.$$

On constate bien que :

$$\mathsf{Tr}(AB) \neq \mathsf{Tr}(A)\,\mathsf{Tr}(B).$$

Exercice A27 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la trace, prouvez qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice A28 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ tels que $AB - BA = B$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $AB^k - B^kA = kB^k$.
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathsf{Tr}(B^k) = 0$.

Définition 40

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.
On dit que les matrices A et B sont semblables si, et seulement si, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$B = P^{-1}AP.$$

Théorème 41

Deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ semblables ont même trace.

Preuve : Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Supposons que A et B soient semblables. Par définition, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$B = P^{-1}AP.$$

Prenons la trace de cette égalité matricielle.

$$\mathsf{Tr}(B) = \mathsf{Tr}(P^{-1}AP) = \mathsf{Tr}((P^{-1}A)P) = \mathsf{Tr}(P(P^{-1}A))$$

d'après la circularité de la trace. Comme $PP^{-1} = I_n$

$$\mathsf{Tr}(B) = \mathsf{Tr}(I_nA) = \mathsf{Tr}(A).$$

□

Exercice E29 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On suppose que :

$$\forall X \in M_n(\mathbb{K}), \quad \mathsf{Tr}(AX) = \mathsf{Tr}(BX).$$

Montrer que $A = B$.

Exercice C30 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Déterminer les matrices X de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$X + \mathsf{Tr}(X)A = B.$$

Exercice E31 : **Soit** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$**.**

1. **Montrer que** $A^2 - 5A + 4I_2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$**.**
2. **Donner le reste de la division euclidienne du polynôme** X^n **par le polynôme** $X^2 - 5X + 4$**.**
3. **En déduire une expression de** A^n **pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$ **en fonction de** A **et** I_2**.**

Exercice E32 : **Soit** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$**.**

1. **Montrer que** $A^2 - 5A + 4I_2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$**.**
2. **Donner le reste de la division euclidienne du polynôme** X^n **par le polynôme** $X^2 - 5X + 4$**.**
3. **En déduire une expression de** A^n **pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$ **en fonction de** A **et** I_2**.**

(a) Calculons :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}, \qquad -5A = \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ 10 & -15 \end{pmatrix}, \quad 4I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

En additionnant ces égalités, on obtient bien :

$$\boxed{A^2 - 5A + 4I_2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}.}$$

(b) Remarquons que $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$. La division euclidienne de X^n par $(X-1)(X-4)$ nous dit qu'il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que :

$$\begin{cases} X^n = (X-1)(X-4)Q(X) + R(X) \\ \\ \mathsf{deg}(R) < \mathsf{deg}((X-1)(X-4)) = 2 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\mathsf{deg}(R) \leqslant 1 \iff R \in \mathbb{R}_1[X] \iff R(X) = \alpha X + \beta,$$

où α et β sont des réels. Déterminons α et β en utilisant la relation : $X^n = (X-1)(X-4)Q(X) + (\alpha X + \beta)$. On évalue cette relation en 1 et en 4 :

$$\begin{cases} 1^n = 0 + \alpha + \beta \\ 4^n = 0 + 4\alpha + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 4^n = 4\alpha + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 4^n - 1 = 3\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{4^n-1}{3} \\ \beta = \frac{4-4^n}{3} \end{cases}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{le reste de la division euclidienne de } X^n \text{ par } (X^2 - 5X + 4) \text{ est } \left(\frac{4^n-1}{3}X + \frac{4-4^n}{3}\right).}$$

(c) On a démontré à la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$X^n = (X^2 - 5X + 4)Q(X) + \frac{4^n - 1}{3}X + \frac{4 - 4^n}{3}.$$

En évaluant cette égalité en la matrice A, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (A^2 - 5A + 4I_2)Q(A) + \frac{4^n - 1}{3}A + \frac{4 - 4^n}{3}I_2.$$

Or, on sait d'après la question (a) que : $A^2 - 5A + 4I_2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$. Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{4^n - 1}{3}A + \frac{4 - 4^n}{3}I_2.}$$