RÉSULTATS GÉNÉRAUX

Exercice 1. Montrer qu'une suite d'entiers relatifs qui est convergente converge vers un entier, puis qu'elle est stationnaire (c'est à dire constante à partir d'un certain rang).

Exercice 2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

1. Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un complexe L, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers L (c'est le théorème de Césaro, hors programme).
2. Donner un exemple simple où la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge alors que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui diverge vers $+\infty$. Montrer que la partie de $\mathbb{R}$ $\left\{u_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ possède un minimum.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui ne diverge pas vers $+\infty$. Montrer que l'on peut en extraire une sous-suite bornée. En déduire que l'on peut en extraire une sous-suite convergente.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

RELATIONS DE COMPARAISON

Exercice 6. Déterminer un équivalent puis la limite de :

1. $a_n = \dfrac{(-1)^n + n}{n + \sqrt{n}}$
2. $b_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1$
3. $c_n = \dfrac{2^n - n^2}{3^n - n^3}$
4. $d_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
5. $e_n = \dfrac{2n + (-1)^n \cos n}{\ln n + n^2}$
6. $f_n = \ln^2(n+1) - \ln^2 n$

Exercice 7. On considère les quatre suites de termes généraux suivants :

$$a_n = -\frac{\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sqrt{n}} \quad , \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad , \quad c_n = \frac{n + \operatorname{th} n}{n \ln n + n^2} \quad , \quad d_n = \left(e^{\frac{1}{\ln n}} - 1\right) \operatorname{sh} n$$

1. Donner un équivalent simple (i.e. composé d'expressions du type n^α, $(\ln n)^\beta$ et γ^n) pour chacune de ces 4 suites et donner leurs limites.
2. Comparer par prépondérance les suites qui tendent vers $+\infty$ et l'inverse de celles qui tendent vers 0.
3. Mêmes question en rajoutant la suite $e_n = \dfrac{2^{n-\ln n}}{\sqrt{\ln n}}$

SUITES RECURRENTES

Exercice 8. Déterminer la nature et l'éventuelle limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $x_0 > 0$ et de la relation de récurrence $x_{n+1} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{x_n^2}{2}$ *on discutera selon la valeur de* x_0

Exercice 9. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sin(a_n)$

1. Etudier la convergence et la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. On supposera ici $a_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Déterminer un réel s non nulle tel que $a_{n+1}^s - a_n^s$ ait une limite finie non nulle L.
   En déduire, grâce au théorème de Césaro (cf Ex. 2), un équivalent simple de a_n.

Exercice 10. En s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$.

Exercice 11. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.

Exercice 12. Etablir que $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\dots}}}} = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$

Exercice 13. On considère une fonction $f : [a,b] \to [a,b]$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant : $\forall x \in [a,b], \left|f'(x)\right| < 1$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [a,b]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

AUTRES TYPES DE SUITES

Exercice 14. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ et $v_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)u_n$.

1. Etudier la monotonie, puis la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On montrera qu'elles convergent vers une même limite L dont on ne cherchera pas à préciser la valeur.
2. Montrer que : $\forall n > 0,\ u_n \leqslant L \leqslant v_n$ et $v_n - u_n \leqslant \dfrac{v_1}{n}$. Déterminer un entier N tel que u_N soit une valeur approchée de L à 10^{-1} près, ainsi qu'une telle valeur approchée de L.

Exercice 15. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution, notée x_n. Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Donner un équivalent simple y_n de x_n, puis un équivalent de $x_n - y_n$.

Exercice 16. Montrer que pour $n \geqslant 2$, le polynôme $P_n = X^n - X - 1$ admet une unique racine x_n sur le segment [1,2]. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1 puis donner un équivalent de $(x_n - 1)$.

Exercice 17. Etudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par : $u_0 = a,\ \ a > 0\,;\ \ x_0 = b,\ \ b > 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + x_n}{2}$ et $x_{n+1} = \dfrac{2\,u_n\,x_n}{u_n + x_n}$

SUITES USUELLES

Exercice 18. Etudier la convergence et la limite de la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 1$

Exercice 19. Etudier la convergence et la limite de la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3$

Exercice 20. Déterminer la forme du terme général de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par la relation de récurrence : $u_{n+2} + 2u_{n+1} + au_n = 0$ (on discutera selon le paramètre a).

Exercice 21. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = -17$ et, pour tout n, $u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n = n$

1. Déterminer une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $v_n = an + b$ vérifiant la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer le terme général de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et préciser son comportement asymptotique.

Exercice 22. On considère une suite de réels $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Etudier suivant les cas la convergence de la suite u

1. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 1$
3. $u_0 > 0,\ u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}\,u_n = u_{n+1}^2$