Programme de Colle - Semaine n° 03

Du 30 septembre au 04 octobre

Séries de réels ou de complexes

Tout type d'exercices

Structures algébriques usuelles

Groupes

- ✎ Définition, exemples, produit fini de groupes.
- ✎ Sous-groupes, intersection de sous-groupes, itérés d'un élément, sous-groupe engendré par une partie, partie génératrice
- ✎ Groupes monogènes, groupes cycliques.
- ✎ Morphisme de groupes, isomorphisme de groupes, bijection réciproque d'un isomorphisme de groupes, **image directe et réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe**, noyau/image, **caractérisation de l'injectivité**
- ✎ Groupes $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$: définition, cyclicité, générateurs
- ✎ **Un groupe monogène infini est isomorphe à** $(\mathbb{Z}, +)$
- ✎ **Un groupe cyclique d'un groupe de cardinal** n **est isomorphe à** $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$
- ✎ Ordre d'un élément dans un groupe.
- ✎ L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.

Anneaux et corps

- ✎ Anneaux, produit fini d'anneaux, sous-anneaux, morphisme d'anneaux, noyau et image d'un morphisme d'anneau. Calculs dans un anneau (formule du binome, identité $a^n - b^n$)
- ✎ Groupe des inversibles d'un anneau.
- ✎ Anneau intègre, corps, sous-corps

Idéaux et divisibilité

- ✎ Idéaux d'un anneau commutatif, le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal. Somme et intersection d'idéaux.
- ✎ Idéal engendré par un élément
- ✎ Divisibilité dans un anneau intègre. $x \Big| y \iff yA \subset xA$
- ✎ Idéaux de $\mathbb{Z}$
- ✎ Groupe des inversibles d'un anneau.
- ✎ Anneau intègre, corps, sous-corps

Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et arithmétique dans $\mathbb{Z}$

- ✎ Anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$. Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est un nombre premier.
- ✎ Théorème chinois : pour $n \wedge m = 1$, $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Applications aux systèmes de congruence.
- ✎ Fonction indicatrice d'Euler φ. Calcul de $\varphi(n)$ pour $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_q^{\alpha_q}$.
- ✎ Théorème d'Euler, petit théorème de Fermat.
- ✎ Arithmétique dans $\mathbb{Z}$, Lien avec les idéaux. ,

Anneau $\mathbb{K}[X]$ et arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

($\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$)

- ✎ Idéaux de $\mathbb{K}[X]$.
- ✎ Relation de Bezout, lemme de Gauss.
- ✎ Polynômes irréductibles.

Algèbre

- ✎ Algèbre, sous-algèbre, morphismes d'algèbres.
- ✎ Sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendré par un élément : $\mathbb{K}[u]$
- ✎ Lemme de décomposition des noyaux.
- ✎ Idéal annulateur d'un endomorphisme, polynome minimal d'un endomorphisme
- ✎ Sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par un élément : $\mathbb{K}[A]$
- ✎ Idéal annulateur d'une matrice, polynome minimal d'une matrice.

Exercices et questions de cours

1. Sous groupe de $(\mathbb{Z},+)$
2. Image directe et réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe
3. Un groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$
4. Un groupe cyclique d'un groupe de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$
5. Groupes $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$: définition, cyclicité, générateurs
6. Sous groupe $G \neq \{0_{\mathbb{R}}\}$ de $(\mathbb{R},+)$: si $\inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right) = \alpha > 0$ alors $G = \alpha\mathbb{Z}$
7. Sous groupe $G \neq \{0_{\mathbb{R}}\}$ de $(\mathbb{R},+)$: si $\inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right) = 0$ alors G est dense dans $\mathbb{R}$.
8. Existence d'un nombre γ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$
9. Idéaux de $(\mathbb{Z},+,\times)$
10. Idéaux de $(\mathbb{K}[X],+,\times)$
11. $\overline{k}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ssi $k \wedge n = 1$
12. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier
13. Fonction indicatrice d'Euler : définition, propriété...
14. Théorème chinois
15. Lemme de décomposition des noyaux
16. Systèmes de congruence $\begin{cases} x \equiv a\ [m] \\ y \equiv b\ [n] \end{cases}$
17. **BANQUE CCP MP 66**

    On note p un entier naturel supérieur ou égal à 2.

    On considère dans $\mathbb{Z}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par : $x\,\mathcal{R}\,y \overset{\text{déf.}}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kp$.

    On note $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation $\mathcal{R}$.

    (a) Quelle est la classe d'équivalence de 0 ? Quelle est celle de p ?

    (b) Donner soigneusement la définition de l'addition usuelle et de la multiplication usuelle dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On justifiera que ces définitions sont cohérentes.

    (c) On admet que, muni de ces opérations, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un anneau. Démontrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si p est premier.
18. **BANQUE CCP MP 86**

    Soit p un nombre premier.

    (a) i. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.

    ii. Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis que p divise $\binom{p}{k}$.

    (b) i. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^p \equiv n \mod p$.
    Indication : Procéder par récurrence.

    ii. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, p ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
19. **BANQUE CCP MP 89**

    Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

    (a) On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
    Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

    (b) On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.
20. **BANQUE CCP MP 94**

    (a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

    (b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
    Soit $c \in \mathbb{N}$.
    Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.

    (c) On considère le système (S) : $\begin{cases} x & \equiv & 6 & \mod(17) \\ x & \equiv & 4 & \mod(15) \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

    i. Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

    ii. *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

Prochain programme : Algèbre linéaire