Dans toute cette feuille, on note $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$

EXERCICES ÉLÉMENTAIRES

Exercice 1. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. En donner une base.

1. $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x - 4y + z = 0\right\}$
2. $B = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$
3. $C = \left\{P \in \mathbb{R}_4[X] \,\middle|\, P(-1) = P'(-1) = 0\right\}$
4. D l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre 3.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on note $F_i = \left\{P \in E \,\middle|\, \forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}, P(j) = 0\right\}$.

Montrer que les F_i sont tous des sous-espaces vectoriels de E, et que $E = \bigoplus_{i=0}^{n} F_i$

Exercice 3. Soit $n \geqslant 2$. On considère l'application u définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $u(P) = 2nXP' + \left(1 - X^2\right) P''$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner sa matrice dans la base canonique.
3. Déterminer une base de $\ker u$ ainsi que $\mathrm{rg}(u)$

Exercice 4. Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}$. On considère l'application f_α qui à tout $M \in E$ associe MA.

1. Montrer que f_α est un endomorphisme de E. Déterminer une base du noyau et de l'image en fonction de α.
2. Écrire la matrice de f_α dans la base canonique $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de E.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Deux méthodes pour calculer A^n :
   (a) Montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et de I_3.
   Montrer qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = a_n I_3 + b_n A$.
   Déterminer ces deux suites. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En effectuant la division euclidienne de X^n par un polynôme P bien choisi, déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En utilisant le polynôme P, justifier que A est inversible et exprimer son inverse comme un polynôme en A.

EXERCICES PLUS THÉORIQUES

Exercice 6. Soit $(a, b) \in (\mathbb{K}^*)^2$ avec $a \neq b$. Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f^2 - (a + b)f + abId_E = 0$.

1. Montrer que f est inversible et exprimer f^{-1} à l'aide de f et Id_E.
2. Montrer que $E = \ker(f - aId_E) \oplus \ker(f - bId_E)$

3. Montrer que $\operatorname{Im}(f-aId_E)=\ker(f-bId_E)$ et $\operatorname{Im}(f-bId_E)=\ker(f-aId_E)$

Exercice 7. Pour $Q\in\mathbb{C}[X]$ non nul, on considère l'application $\pi_Q:\mathbb{C}[X]\mapsto\mathbb{C}[X]$ qui, à un polynôme P, fait correspondre le reste de la division euclidienne de P par Q.
Montrer que π_Q est un projecteur. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 8. Soit $u\in\mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. Montrer les équivalences : $\ker(u)=\ker\left(u^2\right)\iff\operatorname{Im}(u)=\operatorname{Im}\left(u^2\right)\iff E=\ker(u)\oplus\operatorname{Im}(u)$.

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u\in\mathscr{L}(E)$ un endomorphisme *nilpotent* d'indice m i.e. vérifiant $u^m=0$ et $u^{m-1}\neq 0$ pour un certain entier $m>0$.

1. Montrer qu'il existe $x_0\in E$ tel que $\left(x_0,u(x_0),\ldots,u^{m-1}(x_0)\right)$ est libre.
2. En déduire que $m\leqslant n$.
3. Dans le cas où $m=n$, vérifier que $\left(u^{n-1}(x_0),\ldots,u(x_0),x_0\right)$ est une base de E et donner la matrice de u dans cette base.
4. Montrer que Id_E-u est inversible. Donner son inverse.

Exercice 10. Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f\circ f=0$.

1. Déterminer les dimensions de $\ker(f)$ et de $\operatorname{Im}(f)$.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans $\mathscr{B}$ soit égale à $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
3. On note $\mathcal{C}(f)=\left\{g\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)\mid f\circ g=g\circ f\right\}$ (commutant de f).
   Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont on déterminera la dimension.

Exercice 11. Soit $f\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que $f^3=-f$ et $f\neq 0$.

1. Montrer, en considérant le déterminant de f, que f n'est pas inversible.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3=\ker(f)\oplus\ker\left(f^2+Id\right)$ puis que $\dim\left(\ker\left(f^2+Id\right)\right)=2$.
3. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Exercice 12. Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie et $f\in\mathscr{L}(E)$.
Démontrer que les suites $(\ker(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im}(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires à partir du même rang p.
Prouver que : $E=\ker(f^p)\oplus\operatorname{Im}(f^p)$

Exercice 13. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n et f,g deux endomorphismes de E tels que $fgf=g$ et $gfg=f$.

1. Montrer que $\operatorname{rg}(f)=\operatorname{rg}(g)=\operatorname{rg}(fg)=\operatorname{rg}(gf)$.
2. Montrer que $E=\ker(f)\oplus\operatorname{Im}(g)$
3. Montrer que ce dernier résultat est encore vrai en dimension quelconque.

Exercice 14. Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et p,q deux projecteurs de E tels que $\operatorname{Im}(p)\subset\ker(q)$.

1. Montrer que $r=p+q-p\circ q$ est un projecteur.
2. Montrer que $\operatorname{Im}(r)=\operatorname{Im}(p)+\operatorname{Im}(q)$ et $\ker(r)=\ker(p)\cap\ker(q)$.

Exercice 15. Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, f un endomorphisme de E et P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que si P divise Q, alors $\ker(P(f)) \subset \ker(Q(f))$ et $\operatorname{Im}(Q(f)) \subset \operatorname{Im}(P(f))$.
2. Montrer que si D est le PGCD de P et Q, alors :
$$\ker(D(f)) = \ker(P(f)) \cap \ker(Q(f)) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(D(f)) = \operatorname{Im}(P(f)) + \operatorname{Im}(Q(f))$$
3. Montrer que si M est le PPCM de P et Q, alors :
$$\ker(M(f)) = \ker(P(f)) + \ker(Q(f)) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(M(f)) = \operatorname{Im}(P(f)) \cap \operatorname{Im}(Q(f))$$

Exercice 16. Théorème de Hadamard sur les matrices à diagonale strictement dominante
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

Montrer que A est inversible.

Indication : on raisonnera par contraposée en montrant que si A est non-inversible alors il existe un indice i_0 tel que $|a_{i_0,i_0}| > \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|$

Exercice 17. Soit D la matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les λ_i sont n réels deux à deux distincts.
Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec D.

TRACE D'UNE MATRICE, TRACE D'UN ENDOMORPHISME

Exercice 18. Matrices de rang 1
Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg}(H) = 1$

1. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $H = U\,{}^tV$ et $\operatorname{tr}(H) ={}^t U V$.
2. En déduire que $H^2 = (\operatorname{tr} H)H$.
3. Préciser dans quel cas $A = I_n + H$ est inversible et donner alors A^{-1}.
Ind : on cherchera l'inverse sous la forme $I_n + \beta H$ avec $\beta \in \mathbb{R}$

Exercice 19. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension $n > 0$. On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^q = Id_E$.

1. Montrer que $p = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=1}^{q} u^k$ est un projecteur.
Ind : on commencera par calculer $u \circ p$, puis $u^2 \circ p$, etc.
2. Montrer que $\dim(\ker(u - Id_E)) = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \operatorname{tr}\left(u^k\right)$

Exercice 20. Trouver toutes les applications linéaires $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
$$\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ f(AB) = f(BA)$$

Ind : on commencera par calculer pour $A = E_{i,j}$ et $B = E_{k,l}$, $f(AB)$ et $f(BA)$, et on examinera par exemple le cs où $j = k = 1$

Exercice 21. Dual de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
On rappelle qu'on note $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $A = (s_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Démontrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$; $\operatorname{tr}(A\,E_{i,j}) = a_{j,i}$.

(b) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $F = \left\{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \,\middle|\, \operatorname{tr}(AX) = 0\right\}$?

2. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On considère l'application $f : A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto f_A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$ avec $f_A : X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \operatorname{tr}(AX) \in \mathbb{K}$.
Montrer que f est un isomorphisme.

DÉTERMINANTS

Exercice 22. Déterminants tridiagonaux

$$\begin{vmatrix} 2\operatorname{ch}(x) & \operatorname{sh}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ \operatorname{sh} x & 2\operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x & \ddots & \vdots \\ 0 & \operatorname{sh} x & 2\operatorname{ch} x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \operatorname{sh} x \\ 0 & \cdots & 0 & \operatorname{sh} x & 2\operatorname{ch} x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z+1/z & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z+1/z & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & z+1/z & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & z+1/z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Exercice 23. Déterminant de Vandermonde (résultat à connaitre par coeur)
Soient $n \geqslant 1$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On définit le déterminant de Vandermonde associé à la famille de scalaires $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$: $V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Démontrer que : $V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$

Exercice 24. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$, et $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant suivant :
$\begin{vmatrix} r_1 & a & a & \cdots & a \\ b & r_2 & a & \ddots & \vdots \\ b & b & r_3 & \ddots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & b & r_n \end{vmatrix}$ *Ind : Poser* $P(x) = \begin{vmatrix} r_1+x & a+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & r_2+x & a+x & \ddots & \vdots \\ b+x & b+x & r_3+x & \ddots & a+x \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & b+x & r_n+x \end{vmatrix}$ *et exprimer le résultat à l'aide de* $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (r_i - \lambda)$

Exercice 25. Soit $x, a_1, a_2, \ldots, a_n$ $n+1$ réels. En utilisant le fait que le déterminant d'une matrice est linéaire par rapport à ses colonnes, calculer $\begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_3 & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & x \end{vmatrix}$

Exercice 26. Soit $f : X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tX \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de l'endomorphisme f.

Exercice 27. Deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ le sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
Soient A, B deux matrices appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer qu'il existe deux matrices U, V dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AU = UB$, $AV = VB$ avec $U + iV$ inversible.
2. Justifiez l'existence d'au moins un réel λ tel que $\det(U + \lambda V) \neq 0$
3. En déduire que A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$