Programme de Colle - Semaine n° 06
Du 04 novembre au 08 novembre

Algèbre linéaire

Rappel

Réduction des endomorphismes

Eléments propres

- ✏ Sous-espaces stables par u, endomorphisme induit
- ✏ Vecteurs propres, valeurs propres, spectre, sous-espaces propres

Polynome caractéristique

- ✏ Polynome caractéristique, multiplicité des valeurs propres, polynome caractéristique d'un endomorphisme induit
- ✏ Théorème de Cayley-Hamilton (admis). Conséquences sur le polynome minimal

Diagonalisation

- ✏ Diagonalisabilité d'un endomorphisme, d'une matrice
- ✏ Caractérisation de la diagonalisabilité
- ✏ Quelques applications de la diagonalisabilité : calcul de puissances, de l'exponentielle de matrices (limite d'une suite de matrice étant définie par la limite des coordonnées)

Exercices et questions de cours

1. Lemme de décomposition des noyaux
2. Interpolation de Lagrange : expression des coordonnées dans la base de Lagrange
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
   Si A est diagonalisable alors B est diagonalisable.
4. Déterminant de Vandermonde
5. Application trace. $tr(AB) = tr(BA)$
6. Si H est une matrice carrée de rang 1, $H^2 = tr(H)\,H$
7. En dimension finie, le spectre de u est égal à l'ensemble des zéros de π_u
8. A est diagonalisable si et seulement si l'idéal annulateur de A contient un polynôme scindé à racines simples de $\mathbb{K}[X]$.
9. BANQUE CCP 71

   Soit p, la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.
   (a) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
   (b) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.
10. BANQUE CCP
    On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$
    (a) Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
    (b) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
    (c) D{eterminant, en justifiant, le polynôme minimal de A.
    (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

11. BANQUE CCP 62

    Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
    Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

    (a) Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
    (b) Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\ (f - 2\mathrm{Id})$:
        i. en utilisant le lemme des noyaux ;
        ii. sans utiliser le lemme des noyaux.
    (c) Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
        Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\ (f - 2\mathrm{Id})$.

12. BANQUE CCP 67

    Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.
    M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

13. BANQUE CCP 69

    Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

    (a) Déterminer le rang de A.
    (b) Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

14. BANQUE CCP 70

    Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

    (a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
    (b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$ où I_3 désigne la matrice unité d'ordre 3. Déduire de la question **1.**, les éléments propres de B.

15. BANQUE CCP 72

    Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

    (a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
    (b) Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
        En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $Vect\,(I_3, A)$

Prochain programme : Trigonalisation, Espaces vectoriels normés