Programme de Colle - Semaine n° 08

Du 18 novembre au 22 novembre

Algèbre linéaire, Réduction des endomorphismes

Rappel

Espaces vectoriels normés

Normes et distances

- ✏ Définition de norme
- ✏ Normes usuelles dns $\mathbb{K}^n$, normes usuelles dans $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$
- ✏ Transport d'une norme, norme d'un espace produit, norme d'algèbre
- ✏ Normes équivalentes : Définition, exemples. En dimension finie toutes les normes sont équivalentes (admis)
- ✏ Distance. Distance d'un point à une droite
- ✏ Boules et sphères
- ✏ Parties bornées
- ✏ Parties convexes

Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

- ✏ Généralités sur les suites, suites bornées.
- ✏ Suites convergentes. Lien avec l'équivalence de normes
- ✏ Suites à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.
- ✏ Suites dans un espace produit

Eléments de topologie dans un espace vectoriel normé

- ✏ Voisinages d'un point.
- ✏ Ouvert, intérieur
- ✏ Fermés, adhérence. Critère séquentiel. Densité. Frontière
- ✏ Topologie induite sur une partie d'un EVN

Exercices et questions de cours

1. Normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$: définition. Pour une d'entre elles, au choix de l'interrogateur, montrer que c'est une norme. Les comparer.
2. Normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$: définition. Pour une d'entre elles, au choix de l'interrogateur, montrer que c'est une norme. Les comparer.
3. $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Si A est une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E,N) et x un point de E, alors $d(x,A) = d(x,\overline{A})$.

5. Si A est une partie non vide bornée d'un espace vectoriel normé (E, N) alors $\overline{A}$ est bornée et $\mathrm{Diam}(A) = \mathrm{Diam}(\overline{A})$.
6. Si A est une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E, N) et x un point de E, alors $d(x, A) = 0 \Longleftrightarrow x \in \overline{A}$.
7. BANQUE CCP 37
   On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose, $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$.
   (a) i. Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
       ii. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.
       iii. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
   (b) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

8. BANQUE CCP 34
   Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.
   (a) Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
   (b) Démontrer que : $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
   (c) Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (d) Démontrer que, si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.
9. BANQUE CCP 38
   On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynÃ´mes à coefficients réels.
   $\forall\, P \in E$, on pose $N_1(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i|$ où $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.
   (a) i. Démontrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
       ii. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.
       iii. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
   (b) On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynÃ´mes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.
   Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?
10. BANQUE CCP 44

    Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.
    (a) i. Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
        ii. Montrer que $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
    (b) Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
    Remarque : Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
    (c) i. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
        ii. Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Prochains programmes : Suites et séries dans un espace vectoriel normé. Topologie. Compact. Fonctions continues