Programme de Colle - Semaine n° 10

Du 02 décembre au 06 décembre

Espaces vectoriels normés

Révisions

- ⇒ Normes et distances
- ⇒ Suites convergentes
- ⇒ Topologie : ouvert, fermé, intérieur, adhérence, frontière, compact
- ⇒ Compact : caractérisation en dimension finie
- ⇒ Distance. Distance d'un point à une partie
- ⇒ Séries dans un espace vectoriel normé : convergence, convergence absolue

Fonctions : limite, continuité

Fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: rappel

- ⇒ Limite finie/infinie en un point a fini/infini
- ⇒ Limites des fonctions monotones
- ⇒ Limite par encadrement
- ⇒ Théorème des valeurs intermédiaires
- ⇒ Théorème d'homéomorphisme

Fonctions convexes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

- ⇒ Définition. Inégalité de Jensen
- ⇒ Caractérisations : Inégalité des trois pentes, Epigraphe, croissance des pentes.
- ⇒ Caractérisations pour des fonctions de classe suffisante : croissance de f' , positivité de f'' .
- ⇒ Inégalité arithmetico-géométrique

Etude locale au voisinage d'un point adhérent

- ⇒ Limite en un point adhérent à A
- ⇒ Propriétés, opérations sur les limites.
- ⇒ Restrictions.
- ⇒ Limites infinies ou en l'infini
- ⇒ Continuité en un point

Propriétés globales des fonctions

- ⇒ Fonctions bornées.
- ⇒ Fonctions continues.
- ⇒ Fonctions uniformément continues.
- ⇒ Fonctions lipschitziennes.
- ⇒ Liens entre les ensembles constitués de ces différentes fonctions

Propriétés topologiques des fonctions continues

- ⇒ Images réciproques des ouverts et fermés par une fonction continue.
- ⇒ Image d'un compact par une fonction continue.
- ⇒ Image d'un compact par une fonction continue.
- ⇒ Continuité et densité : si deux applications continues coïncident sur une partie dense, elles sont égales
- ⇒ Parties connexes par arcs.
- ⇒ Image d'une partie connexe par arcs par une fonction continue.

Exercices et questions de cours

1. $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (via le spectre de A ou via la continuité de $\det$)
2. En dimension finie, les compacts sont les parties fermées bornées.
3. Théorème de Heine
4. Si f est une fonction continue d'un compact K de E vers $\mathbb{R}$ alors f est majorée et qu'elle atteint son maximum
5. Deux fonctions continues coïncidant sur une partie dense sont égales
6. Si U ouvert non vide de E , $\text{vect}(U) = E$
7. Montrer que pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$.
8. Montrer, de deux façons différentes, que si f est une fonction continue de E vers $\mathbb{R}$ et si $a \in \mathbb{R}$, les parties $\{x \in E \mid f(x) \geq a\}$, $\{x \in E \mid f(x) \leq a\}$ et $\{x \in E \mid f(x) = a\}$ sont des fermés.
9. Montrer, de deux façons différentes, que si f est une fonction continue de E vers $\mathbb{R}$ et si $a \in \mathbb{R}$, les parties $\{x \in E \mid f(x) > a\}$, $\{x \in E \mid f(x) < a\}$ et $\{x \in E \mid f(x) \neq a\}$ sont des ouverts.
10. BANQUE CCP 35
 E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

(a) Soient f une application de E dans F et a un point de E .

On considère les propositions suivantes :

P1. f est continue en a .

P2. Pour toute suite (x_n) d'éléments de E telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

(b) Soit A une partie dense d'un sous-espace vectoriel normé E , et soient f et g deux applications continues de E dans F , F désignant un espace vectoriel normé.

Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

11. BANQUE CCP 41

Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.

Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.

Remarques

(a) On utilisera au moins une fois des suites.

(b) On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire

(c) Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

12. BANQUE CCP 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

(a) i. Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .

ii. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

(b) Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

Prochains programmes : Suites et séries de fonctions