

CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ DES INTÉGRALES À PARAMÈTRES

Exercice 1. Calcul de l'intégrale de Gauss

Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
2. Calculer $f(0)$. Puis à l'aide de majoration et de minoration, déterminer les limites de $f(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x^2)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$.
4. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 t + x \cos^2 t) dt$.

Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer $I'(x)$ puis $I(x)$ pour $x > 0$.

Exercice 3. On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt$ et $g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer f' en fonction de g et g' . En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 4. On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2tx) dt$. Déterminer l'ensemble de définition I de f , puis montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et calculer $f'(x)$ pour $x \in I$. En déduire $f(x)$ pour $x \in I$.

Exercice 5. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_p(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + x^2)^p}$. Montrer que I_p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer une relation entre I'_p et I_{p+1} . Calculer I_1 , I_2 puis I_p pour tout entier p .

Exercice 6. Montrer que $f : x \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2 t^2)}{t^2(1+t^2)} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer f' puis f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 7. Montrer que $f : x \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Calculer f'' puis f' puis f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 8. Montrer que l'application f définie par $f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$ admet un unique zéro sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Exercice 9. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(x \sin t)}{\sin t} dt$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ puis $f(x)$.

Exercice 10. On pose $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ et $g(x) = \int_0^{\pi/4} \exp\left(\frac{-x^2}{\cos^2 \theta}\right) d\theta$.

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis que $f^2 + g$ est constante sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 11. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout x réel. Calculer ensuite explicitement $f(x)$ pour tout x réel.

Exercice 12. On pose $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$ et $f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-tx} dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, en déduire que pour tout $x > 0$, $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq 0$ $u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \varphi(t)e^{-tx} dt$. En utilisant la série $\sum u_n$, montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$. En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

FONCTION GAMMA (Γ)

Exercice 13. Pour tout réel x , on pose sous réserve d'existence : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Démontrer que l'ensemble de définition de la fonction Γ est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer Γ' .
3. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées successives.
4. À partir de la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, obtenir la limite et un équivalent en 0 de $\Gamma(x)$.

Exercice 14. Fonctions Γ et ζ

On rappelle que pour tout $x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Démontrer que pour tout $x > 1$, $\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$.

PROBLEMES "CLASSIQUES"

Exercice 15 (Théorème de d'Alembert-Gauss). Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geq 1$. Le but de cet exercice est de prouver que P admet une racine dans $\mathbb{C}$. On suppose au contraire que P ne s'annule pas et on considère pour $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$f(r, \theta) = \frac{r^d e^{id\theta}}{P(re^{i\theta})} \text{ et } F(r) = \int_0^{2\pi} f(r, \theta) d\theta.$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
2. Vérifier que : $ir \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial \theta}$. En déduire que F est constante.
3. Obtenir une contradiction.

Exercice 16. Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. La transformée de Fourier de f est $T(f) : x \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t) dt$.

1. Montrer que T est une application linéaire de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vers $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
2. Déterminer $T(f)$ lorsque $f(x) = e^{-|x|}$.
3. Montrer que si $x \rightarrow xf(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.
4. Plus généralement, montrer que si pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \rightarrow x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et calculer ses dérivées.
5. On pose $f(x) = \exp(-\pi x^2)$ et $g = T(f)$, montrer que g est solution d'une équation différentielle du premier ordre, puis calculer g .

Exercice 17. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$. On note $I(f)$ l'ensemble de définition de $L(f) : x \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t) dt$ (transformée de Laplace de f).

1. On suppose $I(f)$ non vide, montrer que $I(f)$ est un intervalle non majoré. Exemple : déterminer $I(f)$ et $L(f)$ lorsque $f(t) = e^{at}$ ($a \in \mathbb{R}$).
2. On suppose f bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $I(f)$ contient $]0, +\infty[$ et que $L(f)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur I . Exemple : déterminer $I(f)$ et $L(f)$ lorsque $f(t) = \cos t$.