

## Programme de Colle - Semaine n° 17

*Du 03 février au 07 février*

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les élèves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre.

Pour le premier groupe, appelé "**Groupe CCP**", les questions de cours intégreront les exercices de banque CCP et toutes les autres questions de cours hormis celles notées "**E3A**".

Le second groupe, appelé "**Groupe E3A**", les questions de cours ne porteront que sur celles notées **DEM** ou notées **E3A**

**Attention** : deux questions de "cours" seront posées aux élèves des deux groupes : une question (courte ~ 5 min) d'ordre pratique pour les élèves du groupe E3A (cette semaine : Un calcul de DL ou un tableau de variation ou convergence d'une série), un énoncé précis d'un résultat du cours pour les autres + une question de cours usuelle.

### Questions courtes (~ 8 min, d'ordre pratique) pour les élèves du groupe E3A

Déterminer la nature (convergence ou non convergence) des intégrales suivantes

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$$

$$2. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

$$3. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}} dx$$

$$4. \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx$$

$$5. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+3x)}}$$

$$6. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x}$$

$$7. \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$$

$$8. \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2 - 1} dt$$

### Questions courtes (~ 5 min, énoncé précis d'un résultat du cours) pour les élèves du groupe CCP

Donner (à l'écrit), l'énoncé précis du théorème suivant :

- |  |  |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Théorème d'interversion des signes somme (<math>\sum</math>) et limite</li> <li>2. théorème de dérivation d'une limite de suite de fonctions</li> <li>3. Énoncé du théorème d'intégration terme à terme</li> <li>4. Théorème de changement de variables dans une intégrale impropre</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>5. Énoncé du théorème de convergence dominée</li> <li>6. Théorème de sommation par paquets</li> <li>7. Énoncé du théorème de dérivation des intégrales à paramètre (ou th. de Leibniz)</li> <li>8. Régularité de la somme d'une série entière.</li> </ol> |
|--|--|

## Cours

### Suites et séries de fonctions, familles sommables

Tout ce qui a été vu : mode de convergence, opération, continuité, intégration, dérivation, familles sommables...

### Séries entières

Tout ce qui a été vu : rayon de convergence, mode de convergence, dérivée et primitive, fonctions développable en série entière, développements en séries entière des fonctions usuelles...

### Intégration généralisée

- ⇒ Intégrale convergente sur un intervalle quelconque
- ⇒ Linéarité, additivité
- ⇒ Intégrabilité d'une fonction sur un intervalle
- ⇒ Intégrabilité des fonctions positives : comparaison, domination, équivalence.
- ⇒ Fonctions de référence
- ⇒ Intégration par parties et changement de variables sur les intégrales convergentes
- ⇒ Théorème de convergence dominée pour les suites (ou séries ou familles) de fonctions
- ⇒ Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

## Intégrale dépendant d'un paramètre

- ⇒ Théorème de continuité sous domination
- ⇒ Théorème de Leibniz (ou théorème de dérivation des intégrales à paramètres). Extension aux dérivations k-ièmes.

### Exercices et questions de cours

Si besoin, le colleur pourra rappeler que  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. **E3A** Énoncé du théorème de changement de variables dans une intégrale impropre
2. **E3A** Énoncé du théorème d'intégration par parties généralisée
3. **E3A** Énoncé du théorème de convergence dominée
4. **E3A** Énoncé du théorème d'intégration terme à terme
5. **E3A** Énoncé du théorème de continuité sous domination
6. **E3A** Énoncé du théorème de dérivation des intégrales à paramètre (ou th. de Leibniz)
7. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $a_0 = a_1 = 1 = -a_2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$ . Domaine de définition et expression de  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
8. **E3A** Développement en série entière (et rayon de convergence) des fonctions usuelles : exp, cos, sin,  $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$ ,  $x \rightarrow \ln(1-x)$ , arctan,  $(1+x)^\alpha \dots$
9. Obtention des développements en série entière des fonctions usuelles : exp, cos, sin,  $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$ ,  $x \rightarrow \ln(1-x)$ , arctan,  $(1+x)^\alpha \dots$
10. **DEM** Existence et valeur de  $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$
11.  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$
12. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1 + \frac{t^2}{n})^n} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$  et en déduire  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$
13. Ensemble de définition, de continuité, de dérivabilité de la fonction  $\Gamma$  d'Euler.
14. **Banque CCP : Ex 25**
  - (a) Démontrer que, pour tout entier  $n$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .
  - (b) On pose  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
15. **Banque CCP : Ex 26**

Pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ .

  - (a) Justifier que  $I_n$  est bien définie.
  - (b) Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et déterminer sa limite.
  - (c) La série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$  est-elle convergente ?
16. **Banque CCP : Ex 30**
  - (a) Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
  - (b) Démontrer que la fonction  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - (c)
    - i. Trouver une équation différentielle linéaire  $(E)$  d'ordre 1 dont  $f$  est solution.
    - ii. Résoudre  $(E)$ .

### Familles sommables, Intégrale sur un intervalle quelconque

GROUPES DE COLLES Groupe E3A :

ALEXANDRE Thomas (4) , BOUTIN Antoine (6) , CUA Baptiste (2) , DELAUNAY Evan (4) ,  
 DEMUYLDER Warren (6) , GRAVIOU Arthur (2) , LEFEBVRE Adrien (6) , MOUNIR Achraf (7)

Groupe CCP : les autres