

PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ

Exercice 1. On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t) e^{-t} dt$$

1. Montrer que l'application φ est un produit scalaire sur E .
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \varphi(X^n, 1)$.
3. Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille $(1, X, X^2)$.

Exercice 2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ défini par

$$\forall(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, (A | B) = \text{tr}({}^t A B)$$

1. Vérifier que pour tout $\forall(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $(A | B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$ et que $(\cdot | \cdot)$ est bien un produit scalaire.
2. Vérifier que la base canonique $(E_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée pour ce produit scalaire.
3. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ (s.e.v. des matrices (anti-) symétriques) vérifient $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
4. Établir que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr} A \leq \sqrt{n \text{tr}({}^t A A)}$ et préciser le cas d'égalité.

Exercice 3. Soient A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$2 \text{tr}(AB) \leq \text{tr}(A^2) + \text{tr}(B^2)$$

Exercice 4. Pour tout $v = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, on pose $N(v) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$.

1. Montrer l'existence et l'unicité d'un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^2$ tel que pour tout v de $\mathbb{R}^2$, $N(v) = \sqrt{\varphi(v, v)}$. En déduire que N est une norme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer une base orthonormée de $(\mathbb{R}^2, \varphi)$.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien, muni d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. Soient $u_1, \dots, u_n$, n vecteurs de E , tels que $\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 < 1$.

1. Montrer que pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 \right)$.
2. Montrer que la famille $(e_1 + u_1, \dots, e_n + u_n)$ est une base de E .

Exercice 6. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, $n+1$ vecteurs de E de même norme tels qu'il existe un réel $\delta < 0$ vérifiant : $\forall(i, j) \in [1, n+1]^2, i \neq j \implies \langle x_i | x_j \rangle = \delta$.

1. Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E .
2. Montrer que les coordonnées de x_{n+1} dans cette base valent toutes -1 , puis déterminer δ .

Exercice 7. Soit $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer tous les produits scalaires φ de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels cette base est orthonormée.

Exercice 8. Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$, on pose $(P | Q) = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire et orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 9. Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on pose, $\forall(P, Q) \in E^2$, $(P | Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

1. Montrer que $(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace préhilbertien.
2. Montrer qu'il existe une unique base orthogonale $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, L_n est unitaire et de degré n . Déterminer L_0, L_1, L_2 .

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = [X^n(1 - X)^n]^{(n)}$. Montrer que la famille (K_n) est orthogonale et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in \mathbb{R} / K_n = a_n L_n$.

Exercice 10. Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on pose, $\forall (P, Q) \in E^2$, $(P | Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

- Montrer que $(E, (|))$ est un espace préhilbertien. Montrer qu'il existe une unique base orthogonale $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, L_n est unitaire et de degré n .
- On fixe ici $n > 1$ et on note q le nombre de racines de L_n dans l'intervalle $] -1, 1[$ dont l'ordre de multiplicité est impair. Si $q = 0$, on pose $Q = 1$. Si $q > 0$, on note $x_1, \dots, x_q$ les racines précédentes et on pose $Q = (X - x_1) \dots (X - x_q)$. Montrer que $(L_n | Q) \neq 0$ et en déduire que $q = n$. Que peut-on en déduire sur les racines du polynôme L_n ?
- Montrer que la suite (T_n) des polynômes de Tchebychev, définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos x) = \cos(nx)$ est orthogonale dans $(E, (|))$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in \mathbb{R} / T_n = a_n L_n$.

Exercice 11. Banque CCP 76

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$.

On pose $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

- (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
(b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) , \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$.

Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt , f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

ORTHOGONAL D'UNE PARTIE

Exercice 12. Banque CCP

Soit E un espace euclidien. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que

- $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
- $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

Exercice 13. en dimension infinie, F n'est pas toujours égal à $(F^\perp)^\perp$.

On munit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par : $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$.

En exploitant le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass, établir que l'orthogonal du sous-espace vectoriel F de E formé des fonctions polynomiales est réduit à $\{0\}$.

Exercice 14. $E = \ell^2(\mathbb{R})$ espace des suites réelles de carré sommable est muni du produit scalaire usuel : $((a_n) | (b_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$.

- Montrer que F , ensemble des suites presque nulles, est un sev de E et en donner une base orthonormée.
- Déterminer $F^\perp$ et vérifier que $F^{\perp\perp} \neq F$ et $F \oplus F^\perp \neq E$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\delta_n = (\delta_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ (symbole de Kronecker) : la famille (δ_n) est-elle une famille totale de $(\ell^2(\mathbb{R}), (|))$?

Exercice 15. Soit E un espace préhilbertien réel.

- Établir que pour tout sous-espace vectoriel F de E , $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$.

Désormais, on suppose $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par : $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$

- Montrer que $H = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid \int_{-1}^1 |t| P(t) dt = 0 \right\}$ est un hyperplan fermé de E .
- Soit $Q \in H^\perp$. Établir que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt = \left(\int_{-1}^1 |t| P(t) dt \right) \left(\int_{-1}^1 Q(t) dt \right)$
- Établir que $H^\perp = \{0\}$ et conclure qu'ici l'inclusion $\overline{H} \subset (H^\perp)^\perp$ est stricte.

Exercice 16. Soit p une projection dans un espace euclidien E . Montrer que :

$$p \text{ est une projection orthogonale} \iff \forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|$$

Indication : pour $\Leftarrow$, prendre $u \in \text{Im}(p)$ et $v \in \text{ker}(p)$ et utiliser que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|p(u + \lambda v)\|^2 \leq \|u + \lambda v\|^2$, pour prouver que $(u|v) = 0$

Exercice 17. Soit E un espace euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}$. Soit P le plan d'équation : $x - 3y + 2z = 0$. Trouver la matrice, relativement à $\mathcal{B}$, de la projection orthogonale sur P .

Exercice 18. Montrer l'existence puis calculer la valeur du minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(a, b) = \int_0^{+\infty} (x^2 - (ax + b))^2 e^{-x} dx$.

Exercice 19. On rappelle que l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique $(\cdot|\cdot)$ défini par $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2, (A|B) = \text{tr}({}^t A B)$ et que les deux s.e.v. des matrices symétriques et antisymétriques sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

Déterminer la distance de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel $S_2(\mathbb{R})$

Exercice 20. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H} = \left\{ M = (m_{i,j}) \mid \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} = 0 \right\}$. On rappelle que l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique $(\cdot|\cdot)$ défini par $\forall (B, C) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, (B|C) = \text{tr}({}^t B C)$.

1. Déterminer la dimension de $\mathcal{H}$, puis une base de $\mathcal{H}^\perp$
2. Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur $\mathcal{H}^\perp$.
3. En déduire la valeur de $\beta = \inf_{M \in \mathcal{H}} \left\{ \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right\}$ en fonction des coefficients $(a_{i,j})$ de la matrice A .

Exercice 21. Matrices de Gram et distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace préhilbertien et soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E .

1. On note $G(x_1, \dots, x_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de coefficients $g_{i,j} = (x_i|x_j)$. La matrice $G(x_1, \dots, x_p)$ s'appelle *matrice de Gram de la famille* $(x_1, \dots, x_p)$. Montrer que
 - * $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille liée $\implies \det G(x_1, \dots, x_p) = 0$
 - * $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre $\implies \det G(x_1, \dots, x_p) > 0$.*(Indication : On écrira $G(x_1, \dots, x_p)$ sous la forme ${}^t A A$ avec une certaine matrice A)*
2. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie p de E et soit $(x_1, \dots, x_p)$ une base de F . Soit enfin $x \in E$. Montrer que :

$$(d(x, F))^2 = \frac{\det G(x, x_1, \dots, x_p)}{\det G(x_1, \dots, x_p)}.$$

Exercice 22. Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on pose, $\forall (P, Q) \in E^2, (P|Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

1. Montrer que $(E, (|))$ est un espace préhilbertien. Montrer qu'il existe une unique base orthogonale $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, L_n$ est unitaire et de degré n .
2. On fixe ici $n > 1$ et on note q le nombre de racines de L_n dans l'intervalle $] -1, 1[$ dont l'ordre de multiplicité est impair. Si $q = 0$, on pose $Q = 1$. Si $q > 0$, on note $x_1, \dots, x_q$ les racines précédentes et on pose $Q = (X - x_1) \dots (X - x_q)$. Montrer que $(L_n|Q) \neq 0$ et en déduire que $q = n$. Que peut-on en déduire sur les racines du polynôme L_n ?
3. Montrer que la suite (T_n) des polynômes de Tchebychev, définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos x) = \cos(nx)$ est orthogonale dans $(E, (|))$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in \mathbb{R} / T_n = a_n L_n$.

Exercice 23. Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, muni de sa base canonique, déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x - 2y + z = 0$.

Exercice 24. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et de la base canonique, on considère le sous espace F d'équations : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer une base orthonormée de F
2. Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ les matrices P de la projection orthogonale sur F , S de la symétrie orthogonale par rapport à F .
3. Soit $x = (1, -1, 1, -1)$, calculer la distance de x à F .

Exercice 25. Montrer l'existence puis calculer la valeur du minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \int_0^1 (t^2 - (xt + y))^2 dt$.

Exercice 26. Montrer l'existence puis calculer la valeur du minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(a, b) = \int_0^{+\infty} (x^2 - (ax + b))^2 e^{-x} dx$.

Exercice 27. $E = \mathbb{R}[X]$. Si $(P, Q) \in E^2$, avec $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$ on pose $(P | Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$.

1. Montrer que $(|)$ est un produit scalaire et que la base canonique est orthonormée.
2. Montrer que $G = \{P \in E / P(1) = 0\}$ est un sev de E et déterminer $G^\perp$. Montrer que $G \oplus G^\perp \neq E$ et $G^{\perp\perp} \neq G$.

ÉCRITURE MATRICIELLE DU PRODUIT SCALAIRE

Exercice 28. Autour de la matrice ${}^t A A$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que ${}^t A A$ est symétrique, et que toutes ses valeurs propres sont positives.
2. Montrer que $\ker(A) = \ker({}^t A A)$, puis que $\text{rg } A = \text{rg } ({}^t A A)$ et enfin que $\text{Im } ({}^t A) = \text{Im } ({}^t A A)$.
3. Que dire de $\text{tr } ({}^t A A)$? Que dire si $\text{tr } ({}^t A A) = 0$?

Exercice 29. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique usuel $(\cdot | \cdot)$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \leq \|X\|$.

1. Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|{}^t A X\| \leq \|X\|$.
2. Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = X \iff {}^t A X = X$.
3. Montrer que $\ker({}^t A - I_n) = (\text{Im } (A - I_n))^\perp$.
4. Établir que $\ker(A - I_n)$ et $\text{Im } (A - I_n)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Exercice 30.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point. Soit w une fonction continue, strictement positive sur l'intervalle I . On suppose de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n w(x)$ est intégrable sur I .

On désigne par E l'ensemble des fonctions f continues sur I telles que la fonction $x \mapsto f(x)^2 w(x)$ soit intégrable sur I .

On définit l'application $(\cdot | \cdot)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall (f, g) \in E^2, (f | g) = \int_I f(x)g(x)w(x)dx$.

1. Justifier que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, contenant les fonctions polynomiales.
En identifiant polynômes formels et fonctions polynomiales sur I , on pourra donc écrire $\mathbb{R}[X] \subset E$.
2. Justifier que pour tout f, g dans E la quantité notée $(f | g)$ existe bien puis démontrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur E .
3. Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que
 - * pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n et de coefficient dominant égal à 1,
 - * pour $i \neq j$, P_i et P_j sont orthogonaux.
4. Montrer que pour tout n , le polynôme P_n a n racines distinctes dans $\overset{\circ}{I}$
Indication : on considérera l'ensemble Z des racines de P_n qui appartiennent à $\overset{\circ}{I}$ et qui sont de multiplicité impaire. S'intéresser ensuite au polynôme $Q = \prod_{z \in Z} (X - z)$
5. Prouver l'existence de deux suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ de réels telles que $\forall n \geq 1, P_{n+1} = (X + a_n) P_n + b_{n-1} P_{n-1}$
On pourra commencer par fixer $n \in \mathbb{N}^$ et étudier le degré du polynôme $P_{n+1} - X P_n$*
6. Étudier le signe de b_{n-1} et en déduire que les zéros de P_n et P_{n-1} sont entrelacés

Ainsi, on obtiendra différentes familles de polynômes orthogonaux selon la fonction w choisie. Cette fonction w est appelée fonction de poids (*weight* en anglais). Les principales familles de polynômes orthogonaux sont résumés dans le tableau suivant :

Nom	Intervalle	Poids w
Polyômes de Legendre	$[-1, 1]$	$x \mapsto 1$
Polyômes de Laguerre	$[0, +\infty[$	$x \mapsto e^{-x}$
Polyômes de Hermite	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^{-x^2}$
Polyômes de Tchebychev de 1ère espèce	$] -1, 1[$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Polyômes de Tchebychev de 2ème espèce	$[-1, 1]$	$x \mapsto \sqrt{1-x^2}$