Programme de Colle - Semaine n° 03

Du 28 septembre au 02 octobre

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él ‘eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours hormis celles notées **"B"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B**
Pour compléter la question de cours, on pourra demander l'énoncé précis d'un résultat ou d'une définition, y compris lorsqu'il ne s'agit pas d'une question du groupe correspondant.

Séries de réels ou de complexes

Généralités

- ✎ Série, terme général, somme partielle, série convergente, somme et restes partiels.
- ✎ *Exemples* : **séries géométriques complexes et séries "télescopiques"**.
- ✎ Condition nécessaire de convergence : le terme général tend vers 0. Grossière divergence.
- ✎ $\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \sum u_n \text{ converge}\right\}$ est un espace vectoriel et l'application qui à un élément de cet ensemble associe sa somme est une application linéaire.
- ✎ Série absolument convergence. La convergence absolue entraine la convergence.

Séries à termes réels positifs

- ✎ Critère de convergence : les sommes partielles sont majorées. Exemple : Séries de Riemann
- ✎ Comparaison par majoration : si $u_n \leqslant v_n$, $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge. Dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.
- ✎ **Comparaison par domination ou prépondérance** :
  si $u_n = O(v_n)$ ou si $u_n = o(v_n)$, $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.
- ✎ **Comparaison par équivalence** : Si $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum v_n$ converge.

Comparaison des restes partiels ou sommes partielles de séries

: u_n et v_n sont positifs. On note $S_n(u)$ la somme partielle et $R_n(u)$ le reste partiel (s'il existe) de la série $\sum u_n$.

- ✎ Si $u_n = O(v_n)$, $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.
  - ✔ En cas de convergence des deux séries : $R_n(u) = O(R_n(v))$
  - ✔ En cas de divergence des deux séries : $S_n(u) = O(S_n(v))$
- ✎ Si $u_n = o(v_n)$, même comparaison en remplaçant O par o.
- ✎ Si $u_n \sim v_n$, $\sum v_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum u_n$ converge.
  - ✔ En cas de convergence des deux séries : $R_n(u) \sim R_n(v)$
  - ✔ En cas de divergence des deux séries : $S_n(u) \sim S_n(v)$

Comparaison avec une intégrale

Si f est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

- ✎ La série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n+1}^{n} f(t)dt - f(n)$ converge.
- ✎ $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

Série alternée

- ✎ **Règle de Leibniz** (ou "critère spécial des séries alternées") : si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit et converge vers 0, $\sum(-1)^n v_n$ converge.
- ✎ Pour une série alternée respectant les conditions de la règle de Leibniz, le reste partiel est du signe et est, en valeur absolue, majoré par le premier terme.
- ✎ Exemples d'utilisation de développements limités lorsqu'un équivalent alterné ne permet pas de conclure

Structures algébriques usuelles

Groupes

- ✏ Définition, exemples, produit fini de groupes.
- ✏ Sous-groupes, intersection de sous-groupes, itérés d'un élément, sous-groupe engendré par une partie, partie génératrice.
- ✏ Groupes monogènes, groupes cycliques.
- ✏ Morphisme de groupes, isomorphisme de groupes, bijection réciproque d'un isomorphisme de groupes, **image directe et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe**, noyau, image, **caractérisation de l'injectivité**.
- ✏ Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$: définition, cyclicité, générateurs.
- ✏ **Un groupe monogène infini est isomorphisme à** $(\mathbb{Z}, +)$
- ✏ **Un groupe cyclique d'un groupe de cardinal** n **est isomorphe à** $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$
- ✏ Ordre d'un élément dans un groupe
- ✏ L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe

Exercices et Questions de cours

1. Comparaison avec une intégrale : Si f est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. La série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n+1}^{n} f(t)dt - f(n)$ converge et $\sum f(n)$ converge sssi la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente
2. **TOUS** Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$
3. **TOUS** Image directe et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe
4. Un groupe cyclique d'un groupe de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$
5. Un groupe monogène infini est isomorphisme à $(\mathbb{Z}, +)$
6. **TOUS** Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$: définition, cyclicité, générateurs

7. Théorème de Lagrange (sur le cardinal des sous-groupes)
8. Sous groupe $G \neq \{0_{\mathbb{R}}\}$ de $(\mathbb{R},+)$: si $\inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right) = \alpha > 0$ alors $G = \alpha\mathbb{Z}$
9. Sous groupe $G \neq \{0_{\mathbb{R}}\}$ de $(\mathbb{R},+)$: si $\inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right) = 0$ alors G est dense dans $\mathbb{R}$.
10. **TOUS** Existence d'un réel γ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ (Constante d'Euler)
11. **TOUS** Règle de d'Alembert
12. **TOUS** Règle de Leibniz (CSSA)
13. Théorème de Césaro
14. **TOUS** Séries de Riemann
15. Séries de Bertrand
16. **Groupe B** : **BANQUE CCP MP 46**
    On considère la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.
    (a) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
    (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
    (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?
17. **BANQUE CCP MP 5**
    (a) On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
        i. **Cas $\boldsymbol{\alpha \leqslant 0}$**
           En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
        ii. **Cas $\boldsymbol{\alpha > 0}$**
           Étudier la nature de la série.
           Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.
    (b) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Prochain programme : **Algèbre**

GROUPES DE COLLES
Groupe B :
AVELANGE (10) , BIHANNIC (10) , BOUGET (14) , GHATGHUT (les deux) (4 & 6)
KICHOUH (8) , LAFROGNE (12) , MAISONNETTE (16) , MARTEL (14) ,
ROBIN (10) , SOUSA (14)
Groupe A : les autres