**Programme de Colle - Semaine n° 04**
*Du 05 octobre au 09 octobre*

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él ‘eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"B"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B**
Pour compléter la question de cours, on pourra demander l'énoncé précis d'un résultat ou d'une définition, y compris lorsqu'il ne s'agit pas d'une question du groupe correspondant.

# Séries de réels ou de complexes

Tout type d'exercices

# Structures algébriques usuelles

## Groupes

- ✎ Définition, exemples, produit fini de groupes. Sous-groupes, intersection de sous-groupes, itérés d'un élément, sous-groupe engendré par une partie, partie génératrice. Groupes monogènes, groupes cycliques.
- ✎ Morphisme de groupes, isomorphisme de groupes, bijection réciproque d'un isomorphisme de groupes, **image directe et réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe**, noyau/image, **caractérisation de l'injectivité**
- ✎ Groupes $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ : définition, cyclicité, générateurs
- ✎ **Un groupe monogène infini est isomorphe à** $(\mathbb{Z},+)$
- ✎ **Un groupe cyclique d'un groupe de cardinal** $n$ **est isomorphe à** $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$
- ✎ Ordre d'un élément dans un groupe.
- ✎ L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.

## Anneaux et corps

- ✎ Anneaux, produit fini d'anneaux, sous-anneaux, morphisme d'anneaux, noyau et image d'un morphisme d'anneau. Calculs dans un anneau (formule du binome, identité $a^n - b^n$)
- ✎ Groupe des inversibles d'un anneau.
- ✎ Anneau intègre, corps, sous-corps

## Idéaux et divisibilité

- ✎ Idéaux d'un anneau commutatif, le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal. Somme et intersection d'idéaux.
- ✎ Idéal engendré par un élément
- ✎ Divisibilité dans un anneau intègre. $x\Big|y \Longleftrightarrow yA \subset xA$
- ✎ Idéaux de $\mathbb{Z}$
- ✎ Groupe des inversibles d'un anneau.
- ✎ Anneau intègre, corps, sous-corps

## Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et arithmétique dans $\mathbb{Z}$

- ✎ Anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$. Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi $n$ est un nombre premier.
- ✎ Théorème chinois : pour $n \wedge m = 1$, $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Applications aux systêmes de congruence.
- ✎ Fonction indicatrice d'Euler $\varphi$. Calcul de $\varphi(n)$ pour $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_q^{\alpha_q}$.
- ✎ Théorème d'Euler, petit théorème de Fermat.
- ✎ Arithmétique dans $\mathbb{Z}$, Lien avec les idéaux.

## Anneau $\mathbb{K}[X]$ et arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

- ✎ Idéaux de $\mathbb{K}[X]$.
- ✎ Relation de Bezout, lemme de Gauss.
- ✎ Polynômes irréductibles.

## Algèbre

- ✎ Algèbre, sous-algèbre, morphismes d'algèbres.
- ✎ Sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendré par un élément : $\mathbb{K}[u]$
- ✎ Lemme de décomposition des noyaux.
- ✎ Idéal annulateur d'un endomorphisme, polynome minimal d'un endomorphisme
- ✎ Sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par un élément : $\mathbb{K}[A]$
- ✎ Idéal annulateur d'une matrice, polynome minimal d'une matrice.

# Exercices et Questions de cours

1. **TOUS** Image directe et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe
2. Un groupe cyclique d'un groupe de cardinal $n$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$
3. Un groupe monogène infini est isomorphisme à $(\mathbb{Z}, +)$
4. **TOUS** Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ : définition, cyclicité, générateurs
5. Théorème de Lagrange (sur le cardinal des sous-groupes)
6. Sous groupe $G \neq \{0_\mathbb{R}\}$ de $(\mathbb{R}, +)$ : si $\inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right) = \alpha > 0$ alors $G = \alpha\mathbb{Z}$
7. Sous groupe $G \neq \{0_\mathbb{R}\}$ de $(\mathbb{R}, +)$ : si $\inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right) = 0$ alors $G$ est dense dans $\mathbb{R}$.
8. **TOUS** Existence d'un réel $\gamma$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ (Constante d'Euler)
9. **TOUS** Idéaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$
10. Idéaux de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$
11. **TOUS** $\overline{k}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ssi $k \wedge n = 1$
12. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi $n$ est premier
13. Fonction indicatrice d'Euler : définition, propriété...
14. Théorème chinois
15. **TOUS** Lemme de décomposition des noyaux
16. Systèmes de congruence $\begin{cases} x \equiv a\ [m] \\ y \equiv b\ [n] \end{cases}$
17. **TOUS BANQUE CCP MP 86**
    Soit $p$ un nombre premier.
    (a) i. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
    ii. Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, $p$ divise $\dbinom{p}{k} k!$ puis que $p$ divise $\dbinom{p}{k}$.
    (b) i. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n \mod p$. **Indication** : Procéder par récurrence.
    ii. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p$ ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
18. **BANQUE CCP MP 89**
    Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
    (a) On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
    Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
    (b) On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.
19. **BANQUE CCP MP 94**
    (a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
    (b) Soit $a$ et $b$ deux entiers naturels premiers entre eux.
    Soit $c \in \mathbb{N}$.
    Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.
    (c) On considère le système $(S)$ : $\begin{cases} x & \equiv & 6 & \mathrm{mod}(17) \\ x & \equiv & 4 & \mathrm{mod}(15) \end{cases}$ dans lequel l'inconnue $x$ appartient à $\mathbb{Z}$.
    i. Déterminer une solution particulière $x_0$ de $(S)$ dans $\mathbb{Z}$.
    ii. *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système $(S)$.

**Prochain programme :** **Algèbre**

GROUPES DE COLLES
Groupe B :
AVELANGE (10) , BIHANNIC (10) , BOUGET (14) , GHATGHUT (les deux ) (4 & 6)
KICHOUH (8) , LAFROGNE (12) , MAISONNETTE (16) , MARTEL (14) , ROBIN (10) ,
SOUSA (14)
Groupe A : les autres