Programme de Colle - Semaine n° 05

Du 12 octobre au 15 octobre

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él ‘eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"B"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B**
Pour compléter la question de cours, on pourra demander l'énoncé précis d'un résultat ou d'une définition, y compris lorsqu'il ne s'agit pas d'une question du groupe correspondant.

Structures algébriques usuelles

Groupes, anneaux, corps, Idéaux, divisibilité, algèbre

Rappel. En particulier notion d'idéal, de polynômes d'endomorphisme (ou de matrice) et d'idéal annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice.
Polynome minimal
Lemme de décomposition des noyaux

Algèbre linéaire

Espaces vectoriels

- ✎ Espace vectoriel, sous-espace vectoriel,
- ✎ Intersection, produit, somme de sous-espaces vectoriels.
- ✎ Somme directe de sous-espaces vectoriels, sous-espaces supplémentaires.
- ✎ Sous-espaces affines

Applications linéaires

- ✏ Application linéaire, images directe et réciproque de sous-espaces par une application linéaire. Noyau, Image.
- ✏ Détermination d'une application linéaire par ses restrictions sur chaque composant d'une somme directe
- ✏ Projecteur, symétrie. Caractérisations.

Familles de vecteurs

- ✏ Combinaisons linéaires, sous-espace engendré par une partie
- ✏ Famille génératrice (finie ou non), famille libre (finie ou non). Base.
- ✏ Caractérisation d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base.

Dimension

- ✏ Definition, théorème de la base incomplète
- ✏ Caractérisation des bases.
- ✏ Dimension d'un sous-espace vectoriel, Formule de Grassmann
- ✏ Théorème du rang. Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Formes linéaires et hyperplans, Equations linéaires

- ✏ Formes linéaires, dual. Hyperplans. Dimension en dimension finie
- ✏ Equations linéaires : ensemble des solutions

Matrices

- ✏ Matrices, matrices carrées, Base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- ✏ Produit de matrices, matrices inversibles. Matrice d'une application linéaire
- ✏ Formules de changement de bases, Matrices équivalentes, matrices semblables
- ✏ Rang d'une matrice, théorème du rang
- ✏ Hyperplans. Dimension en dimension finie
- ✏ Matrice par blocs : produit de matrices par blocs
- ✏ Trace d'une matrice, trace d'en endomorphisme en dimension finie

Déterminant

- ✏ Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme, d'une matrice
- ✏ Calcul de déterminants par : méthode du pivot ou développement selon une rangée
- ✏ Déterminant, déterminants tridiagonaux

Exercices et Questions de cours

1. **TOUS** Existence d'un nombre γ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$
2. **TOUS** Image directe et réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe
3. **TOUS** Idéaux de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$
4. Fonction indicatrice d'Euler
5. Caractérisation des projecteurs par l'idempotence
6. Caractérisation des symétries par l'involutivité
7. Théorème chinois
8. **TOUS** Lemme de décomposition des noyaux
9. Interpolation de Lagrange : expression des coordonnées dans la base de Lagrange
10. **TOUS** Déterminant de Vandermonde
11. Application trace. $tr(AB) = tr(BA)$
12. **TOUS** Si H est une matrice carrée de rang 1, $H^2 = tr(H)\,H$
13. BANQUE CCP 60

    Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

    (a) Déterminer $\mathrm{Ker} f$.

    (b) f est-il surjectif ?

    (c) Trouver une base de $\mathrm{Ker} f$ et une base de $\mathrm{Im} f$.

    Solution Corrigé exercice 60

    (a) Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
    On a $f(M) = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$.
    Alors $M \in \ker f \iff \exists\,(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}$.
    C'est-à-dire, $M \in \ker f \iff \exists\,(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$.
    On en déduit que $\ker f = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

    (b) $\ker f \neq \{0\}$, donc f est non injectif.
    Or f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie.
    On en déduit que f est non surjectif.

    (c) On pose $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
    D'après 1., la famille (M_1, M_2) est génératrice de $\ker f$.
    De plus, M_1 et M_2 sont non colinéaires donc (M_1, M_2) est libre.
    Donc, (M_1, M_2) est une base de $\ker f$.
    Par la formule du rang, $\mathrm{rg} f = 2$.
    On pose $M_3 = f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
    M_3 et M_4 sont non colinéaires donc (M_3, M_4) est une famille libre de $\mathrm{Im} f$.
    Comme $\mathrm{rg} f = 2$, (M_3, M_4) est une base de $\mathrm{Im} f$.
14. BANQUE CCP 62
    Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
    Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \mathrm{Id}$.

    (a) Démontrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\ f$.

(b) Démontrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\ g$.

(c) Démontrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im}\ g$.

Solution Corrigé exercice 62

(a) On a toujours $\ker f \subset \ker(g \circ f)$. (*)
Prouvons que $\ker(g \circ f) \subset \ker f$.

Soit $x \in \ker(g \circ f)$.
On a $g \circ f(x) = 0_E$ donc $f \circ g \circ f(x) = f(0_E) = 0_E$.
Or $f \circ g = \mathrm{Id}$ donc $f(x) = 0_E$.
Donc $x \in \ker f$.
On en déduit que $\ker(g \circ f) \subset \ker f$. (**)
D'après (*) et (**), $\ker(g \circ f) = \ker f$.

(b) On a toujours $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im} g$. (***)
Prouvons que $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$.

Soit $y \in \mathrm{Im} g$.
$\exists\, x \in E$ tel que $y = g(x)$.
Or $f \circ g = \mathrm{Id}$ donc $y = g \circ f \circ g(x) = (g \circ f)(g(x))$.
C'est-à-dire $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$.
On en déduit que $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$. (****)
Donc, d'après (***) et (****), $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g$

(c) Soit $x \in \ker f \cap \mathrm{Im} g$.
Alors, $f(x) = 0$ et $\exists\, a \in E$ tel que $x = g(a)$.
Donc $f \circ g(a) = 0$.
Or $f \circ g = \mathrm{Id}$, donc $a = 0$.
Or $x = g(a)$ donc $x = 0$.
Donc $\ker f \cap \mathrm{Im} g = \{0_E\}$.
Soit $x \in E$.

On peut écrire $x = (x - g(f(x))) + g(f(x))$ avec :
$g(f(x)) \in \mathrm{Im} g$ et $x - g(f(x)) \in \ker f$ car $f\,(x - g(f(x))) = f(x) - (f \circ g)(f(x)) = f(x) - f(x) = 0_E$.

Ainsi $E = \ker f + \mathrm{Im} g$.
On en déduit que $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} g$.

Remarque 1 :

On aurait pu remarquer que $g \circ f$ est un projecteur et conclure plus immédiatement.
Remarque 2 :
On aurait pu également raisonner par analyse et synthèse.

15. **TOUS** BANQUE CCP 64
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.
(a) Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
(b) i. Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \ker f = \ker f^2$.
ii. Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f$.

Solution Corrigé exercice 64

(a) Supposons $E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f$.
Indépendamment de l'hypothèse, on peut affirmer que $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ (*)
Montrons que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$.

Soit $y \in \mathrm{Im} f$.
Alors, $\exists\, x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Or $E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f$, donc $\exists\, (a, b) \in E \times \ker f$ tel que $x = f(a) + b$.
On a alors $y = f^2(a) \in \mathrm{Im} f^2$.
Ainsi $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$ (**)
D'après (*) et (**), $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

(b) i. On a $\mathrm{Im}f^2 \subset \mathrm{Im}f$ et $\ker f \subset \ker f^2$.
On en déduit que $\mathrm{Im}f^2 = \mathrm{Im}f \iff \mathrm{rg}f^2 = \mathrm{rg}f$ et $\ker f = \ker f^2 \iff \dim\ker f = \dim\ker f^2$.
Alors, en utilisant le théorème du rang, $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2 \Leftrightarrow \mathrm{rg}f = \mathrm{rg}f^2 \Leftrightarrow \dim\ker f = \dim\ker f^2 \Leftrightarrow \ker f = \ker f^2$.

ii. Supposons $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2$.
Soit $x \in \mathrm{Im}f \cap \ker f$.

$\exists\, a \in E$ tel que $x = f(a)$ et $f(x) = 0_E$.
On en déduit que $f^2(a) = 0_E$ c'est à dire $a \in \ker f^2$.
Or, d'après l'hypothèse et 2.(a), $\ker f^2 = \ker f$ donc $a \in \ker f$ c'est à dire $f(a) = 0_E$.
C'est à dire $x = 0$.
Ainsi $\mathrm{Im}f \cap \ker f = \{0_E\}$. (***)
De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}f + \dim\ker f = \dim E$. (****)

Donc, d'après (***) et (****), $E = \mathrm{Im}f \oplus \ker f$.

16. BANQUE CCP 90
$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

(a) Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(b) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1,2,3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
i. Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
ii. Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

(c) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

(d) *Application :* On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Solution Corrigé exercice 90

(a) Par linéarité de l'évaluation $P \mapsto P(a)$ (o ? a est un scalaire fixé), Φ est linéaire.

Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $\Phi(P) = 0$.
Alors $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0$, donc P admet trois racines distinctes.
Or P est de degré inférieur ou égal à 2 ; donc P est nul.
Ainsi, $\ker(\Phi) = \{0\}$ i.e. Φ est injective.

Enfin, $\dim\big(\mathbb{K}_2[X]\big) = \dim\big(\mathbb{K}^3\big) = 3$ donc Φ est bijective.

Par conséquent, Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{K}_2[X]$ dans $\mathbb{K}^3$.

(b) i. Φ est un isomorphisme donc l'image réciproque d'une base est une base.
Ainsi, (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

ii. $L_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et vérifie $\Phi(L_1) = (1,0,0)$ i.e. $\big(L_1(a_1), L_1(a_2), L_1(a_3)\big) = (1,0,0)$.
Donc, comme a_2 et a_3 sont distincts, $(X-a_2)(X-a_3) \,|\, L_1$.
Or $\deg L_1 \leqslant 2$, donc $\exists k \in \mathbb{K}$ tel que $L_1 = k(X-a_2)(X-a_3)$.
La valeur $L_1(a_1) = 1$ donne $k = \dfrac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$.
Donc $L_1 = \dfrac{(X-a_2)(X-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$.
Un raisonnement analogue donne $L_2 = \dfrac{(X-a_1)(X-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}$ et $L_3 = \dfrac{(X-a_1)(X-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$.

(c) (L_1, L_2, L_3) base de $\mathbb{K}_2[X]$ donc $\exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$.
Par construction, $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, L_i(a_j) = \delta_{ij}$ donc $P(a_j) = \lambda_j$.
Ainsi, $P = P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3$.

(d) On pose $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$. Ces trois réels sont bien distincts.

On cherche $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) = (1,3,1)$.
Par bijectivité de Φ et d'après 3. , l'unique solution est le polynôme $P = 1.L_1 + 3.L_2 + 1.L_3$.
On a $L_1 = \dfrac{(X-1)(X-2)}{2}$, $L_2 = \dfrac{X(X-2)}{-1}$ et $L_3 = \dfrac{X(X-1)}{2}$.
Donc $P = -2X^2 + 4X + 1$.

Prochain programme : **Algèbre**

GROUPES DE COLLES
Groupe B :
AVELANGE (10) , BIHANNIC (10) , BOUGET (14) , GHATGHUT (les deux) (4 & 6)
KICHOUH (8) , LAFROGNE (12) , MAISONNETTE (16) , MARTEL (14) , ROBIN (10) , SOUSA (14)
Groupe A : les autres