

Programme de Colle - Semaine n° 10

Du 30 novembre au 05 décembre

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les élèves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre.

Pour le premier groupe, appelé "**Groupe A**", les questions de cours intégreront toutes les questions de cours sauf celles notées "**B**".

Le second groupe, appelé "**Groupe B**", les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B**.

Pour compléter la question de cours, on pourra demander l'énoncé précis d'un résultat ou d'une définition, y compris lorsqu'il ne s'agit pas d'une question du groupe correspondant.

Espaces vectoriels normés

Révisions

- ⇒ Normes et distances
- ⇒ Suites convergentes
- ⇒ Topologie : ouvert, fermé, intérieur, adhérence, frontière, compact
- ⇒ Compact : caractérisation en dimension finie
- ⇒ Distance. Distance d'un point à une partie
- ⇒ Séries dans un espace vectoriel normé : convergence, convergence absolue

Fonctions : limite, continuité

Fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} : rappel

- ⇒ Limite finie/infinie en un point a fini/infini
- ⇒ Limites des fonctions monotones
- ⇒ Limite par encadrement
- ⇒ Théorème des valeurs intermédiaires
- ⇒ Théorème d'homéomorphisme

Fonctions convexes de \mathbb{R} vers \mathbb{R}

- ⇒ Définition. Inégalité de Jensen
- ⇒ Caractérisations : Inégalité des trois pentes, Epigraphe, croissance des pentes.
- ⇒ Caractérisations pour des fonctions de classe suffisante : croissance de f' , positivité de f'' .
- ⇒ Inégalité arithmetico-géométrique

Etude locale au voisinage d'un point adhérent

- ⇒ Limite en un point adhérent à A
- ⇒ Propriétés, opérations sur les limites.
- ⇒ Restrictions.
- ⇒ Limites infinies ou en l'infini
- ⇒ Continuité en un point

Propriétés globales des fonctions

- ⇒ Fonctions bornées.
- ⇒ Fonctions continues.
- ⇒ Fonctions uniformément continues.
- ⇒ Fonctions lipschitziennes.
- ⇒ Liens entre les ensembles constitués de ces différentes fonctions

Propriétés topologiques des fonctions continues

- ⇒ Images réciproques des ouverts et fermés par une fonction continue. .
- ⇒ Image d'un compact par une fonction continue.
- ⇒ Continuité et densité : si deux applications continues coïncident sur une partie dense, elles sont égales
- ⇒ Parties connexes par arcs.
- ⇒ Image d'une partie connexe par arcs par une fonction continue.

Exercices et Questions de cours

1. En dimension finie, les compacts sont les parties fermées bornées.
2. Théorème de Heine
3. **TOUS** Si A partie non vide de E , l'application $x \rightarrow d(x, A)$ est continue
4. **TOUS** Si f est une fonction continue d'un compact K de E vers \mathbb{R} alors f est majorée et qu'elle atteint son maximum
5. Deux fonctions continues coïncidant sur une partie dense sont égales
6. Montrer que si f est une fonction continue de E vers \mathbb{R} et si $a \in \mathbb{R}$, les parties $\{x \in E \mid f(x) \geq a\}$, $\{x \in E \mid f(x) \leq a\}$ et $\{x \in E \mid f(x) = a\}$ sont des fermés.
7. Montrer que si f est une fonction continue de E vers \mathbb{R} et si $a \in \mathbb{R}$, les parties $\{x \in E \mid f(x) > a\}$, $\{x \in E \mid f(x) < a\}$ et $\{x \in E \mid f(x) \neq a\}$ sont des ouverts.
8. BANQUE CCP 35
 E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

(a) Soient f une application de E dans F et a un point de E .

On considère les propositions suivantes :

P1. f est continue en a .

P2. Pour toute suite (x_n) d'éléments de E telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

(b) Soit A une partie dense d'un sous-espace vectoriel normé E , et soient f et g deux applications continues de E dans F , F désignant un espace vectoriel normé.

Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Solution Corrigé exercice 35

(a) Prouvons que $P1. \implies P2.$

Supposons f continue en a .

Soit (x_n) une suite d'éléments de E convergeant vers a . Prouvons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par continuité de f en a , $\exists \alpha > 0 \mid \forall x \in E, \|x - a\| \leq \alpha \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon$. (*)

On fixe un tel α strictement positif.

Par convergence de (x_n) vers a , $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|x_n - a\| \leq \alpha$.

On fixe un N convenable.

Alors, d'après (*), $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|f(x_n) - f(a)\| \leq \varepsilon$.

On peut donc conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Prouvons que $P2. \implies P1.$

Supposons $P2.$ vraie.

Raisonnons par l'absurde en supposant que f non continue en a .

C'est-à-dire $\exists \varepsilon > 0 \mid \forall \alpha > 0, \exists x \in E$ tel que $\|x - a\| \leq \alpha$ et $\|f(x) - f(a)\| > \varepsilon$.

On fixe un tel ε strictement positif.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\alpha = \frac{1}{n}$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n - a\| \leq \frac{1}{n}$ et $\|f(x_n) - f(a)\| > \varepsilon$. (*)

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|x_n - a\| \leq \frac{1}{n}$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi construite converge vers a .

Donc, d'après l'hypothèse, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $f(a)$.

Donc $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|f(x_n) - f(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi, on obtient une contradiction avec (*).

(b) Soit $x \in E$.

Puisque la partie A est dense dans E , il existe une suite (x_n) d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = g(x_n)$.

Et en passant à la limite, sachant que f et g sont continues sur E , on obtient $f(x) = g(x)$.

9. BANQUE CCP 41

Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans \mathbb{R}^2 .

Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.

Remarques

- (a) On utilisera au moins une fois des suites.
 (b) On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire
 (c) Ne pas utiliser le fait que \mathbb{R}^2 et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

Solution Corrigé exercice 41

- (a) L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

Exemple : $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$ est un fermé de \mathbb{R}^2 car c'est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ de \mathbb{R} par

$$\text{l'application continue } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array} .$$

- (b) Si F_1, F_2, \dots, F_n sont des fermés d'un espace vectoriel E , alors $F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ est un fermé de E^n .

Exemple : $\mathbb{R} \times \{0\}$ est un fermé de \mathbb{R}^2 en tant que produit de deux fermés de \mathbb{R} .

- (c) Caractérisation séquentielle des fermés :

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E .

A est un fermé de E si et seulement si, pour toute suite (x_n) à valeurs dans A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$, alors $x \in A$.

Exemple : $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geq 1\}$ est un fermé.

En effet, soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de A qui converge vers (x, y) .

$\forall n \in \mathbb{N}, x_n y_n \geq 1$, donc, par passage à la limite, $xy \geq 1$ donc $(x, y) \in A$.

- (d) L'intersection de deux fermés d'un espace vectoriel normé E est un fermé de E .

Exemple : $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geq 1 \text{ et } x \geq 0\}$.

On pose $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geq 1\}$ et $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0\}$.

D'après 3., A_1 est un fermé.

A_2 est également un fermé.

En effet, A_2 est l'image réciproque du fermé $[0, +\infty[$ de \mathbb{R} par l'application continue $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array} .$

On en déduit que $A = A_1 \cap A_2$ est un fermé de E .

10. TOUS BANQUE CCP 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

- (a) i. Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
 ii. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
 (b) Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur \mathbb{R} telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

Solution Corrigé exercice 43 On pose $f(x) = \text{Arctan } x$ et $g(x) = \text{Arctan } x - x$.

- (a) i. **Premier cas** : Si $u_1 < u_0$

Puisque la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan } x$ est strictement croissante sur \mathbb{R} alors $\text{Arctan}(u_1) < \text{Arctan}(u_0)$ c'est-à-dire $u_2 < u_1$.

Par récurrence, on prouve que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$. Donc la suite (u_n) est décroissante.

Deuxième cas : Si $u_1 > u_0$

Par un raisonnement similaire, on prouve que la suite (u_n) est croissante.

Troisième cas : Si $u_1 = u_0$

La suite (u_n) est constante.

Pour connaître les variations de la suite (u_n) , il faut donc déterminer le signe de $u_1 - u_0$, c'est-à-dire le signe de $\text{Arctan}(u_0) - u_0$. On étudie donc le signe de la fonction g .

On a $\forall x \in \mathbb{R} g'(x) = \frac{-x^2}{1+x^2}$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) < 0$.

Donc g est strictement décroissante sur \mathbb{R} et comme $g(0) = 0$ alors :

$\forall x \in]0, +\infty[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]-\infty, 0[, g(x) > 0$.

On a donc trois cas suivant le signe de x_0 :

- Si $x_0 > 0$, la suite (u_n) est décroissante.

- Si $x_0 = 0$, la suite (u_n) est constante.

- Si $x_0 < 0$, la suite (u_n) est croissante.

- ii. La fonction g étant strictement décroissante et continue sur \mathbb{R} , elle induit une bijection de \mathbb{R} sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

0 admet donc un unique antécédent par g et, comme $g(0) = 0$, alors 0 est le seul point fixe de f .

Donc si la suite (u_n) converge, elle converge vers 0 , le seul point fixe de f .

Premier cas : Si $u_0 > 0$

L'intervalle $]0, +\infty[$ étant stable par f , on a par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge et ce vers 0, unique point fixe de f .

Deuxième cas : Si $u_0 < 0$

Par un raisonnement similaire, on prouve que (u_n) est croissante et majorée par 0, donc elle converge vers 0.

Troisième cas : Si $u_0 = 0$

La suite (u_n) est constante.

Conclusion : $\forall u_0 \in \mathbb{R}$, (u_n) converge vers 0.

(b) Soit h une fonction continue sur \mathbb{R} telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

On a alors $h(x) = h(u_0) = h(\text{Arctan}(u_0)) = h(u_1) = h(\text{Arctan}(u_1)) = h(u_2) = \dots$

Par récurrence, on prouve que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(x) = h(u_n)$.

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(u_n) = h(0)$ par convergence de la suite (u_n) vers 0 et par continuité de h .

On obtient ainsi : $h(x) = h(0)$ et donc h est une fonction constante.

Réciproquement, toutes les fonctions constantes conviennent.

Conclusion : Seules les fonctions constantes répondent au problème.

11. TOUS BANQUE CCP 37

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} .

On pose, $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(x)| dx$.

- (a) i. Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E .
 ii. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E , $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$.
 iii. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞ .
- (b) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Solution Corrigé © exercice 37

(a) i. Prouvons que N_∞ est une norme sur E .

$\forall f \in E$, $|f|$ est positive et continue sur le segment $[0, 1]$ donc f est bornée et donc $N_\infty(f)$ existe et est positive.

i) Soit $f \in E$ telle que $N_\infty(f) = 0$.

Alors, $\forall t \in [0, 1]$, $|f(t)| = 0$, donc $f = 0$.

ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$.

Si $\lambda = 0$ alors $N_\infty(\lambda f) = 0 = |\lambda| N_\infty(f)$.

Si $\lambda \neq 0$:

$\forall t \in [0, 1]$, $|\lambda f(t)| = |\lambda| |f(t)| \leq |\lambda| N_\infty(f)$.

Donc $N_\infty(\lambda f) \leq |\lambda| N_\infty(f)$. (1)

$\forall t \in [0, 1]$, $|f(t)| = \frac{1}{|\lambda|} |\lambda f(t)| \leq \frac{1}{|\lambda|} N_\infty(\lambda f)$.

Donc $N_\infty(f) \leq \frac{1}{|\lambda|} N_\infty(\lambda f)$.

C'est-à-dire, $|\lambda| N_\infty(f) \leq N_\infty(\lambda f)$. (2)

Donc, d'après (1) et (2), $N_\infty(\lambda f) = |\lambda| N_\infty(f)$.

iii) Soit $(f, g) \in E^2$.

$\forall t \in [0, 1]$, $|(f+g)(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$.

Donc $N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$.

On en déduit que N_∞ est une norme.

Prouvons que N_1 est une norme sur E .

$\forall f \in E$, $|f|$ est continue et positive sur $[0, 1]$ donc $N_1(f)$ existe et est positive.

i) Soit $f \in E$ telle que $N_1(f) = 0$.

Or $|f|$ est continue et positive sur $[0, 1]$, donc $|f|$ est nulle.

C'est-à-dire $f = 0$.

ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$.

$$N_1(f) = \int_0^1 |\lambda f(t)| dt = |\lambda| \int_0^1 |f(t)| dt = |\lambda| N_1(f)$$

iii) Soit $(f, g) \in E^2$.

$\forall t \in [0, 1], |(f+g)(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$. Donc, par linéarité de l'intégrale, $N_1(f+g) \leq N_1(f) + N_1(g)$.
On en déduit que N_1 est une norme sur E .

ii. $k = 1$ convient car, $\forall f \in E, \int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 N_\infty(f) dx = N_\infty(f)$.

iii. L'application identité de E , muni de la norme N_∞ , vers E , muni de la norme N_1 , est continue car linéaire et vérifiant $\forall f \in E, N_1(f) \leq k N_\infty(f)$.

L'image réciproque d'un ouvert par une application continue étant un ouvert, on en déduit que :
un ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞ .

On peut aussi raisonner de façon plus élémentaire par inclusion de boules et retour à la définition d'un ouvert.

(b) Pour $f_n(x) = x^n$, on a $N_1(f_n) = \frac{1}{n+1}$ et $N_\infty(f_n) = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)} = +\infty$.

Donc ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Prochain programme : continuité des applications linéaires (multilinéaires). Suites de fonctions

GROUPES DE COLLES

Groupe B :

AVELANGE (10) , BIHANNIC (10) , BOUGET (14) , GHATGHUT (les deux) (4 & 6)

KICHOUH (8) , LAFROGNE (12) , MAISONNETTE (16) , MARTEL (14) , MJAHEH (8) ,

ROBIN (10) , SOUSA (14)

Groupe A : les autres