Programme de Colle - Semaine n° 11

Du 07 décembre au 11 décembre

Pour cette seconde séance de "TD/Colles", le programme des enseignements est constitué d'une étude des applications linéaires continues et des suites de fonctions.
Les séances sont constituées d'une demi-heure d'interrogation écrite puis d'une séance de TD durant laquelle, on cherchera des exercices à choisir parmi les exercices donnés en seconde partie. On essaiera de faire passer un maximum d'élèves au tableau.

Fonctions : limite, continuité

Fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: rappel

Rappel de Sup et fonctions convexes.

Etude locale au voisinage d'un point adhérent

- ✏ Limite en un point adhérent à A
- ✏ Propriétés, opérations sur les limites.
- ✏ Restrictions.
- ✏ Limites infinies ou en l'infini
- ✏ Continuité en un point

Propriétés globales des fonctions

- ✏ Fonctions bornées ; Fonctions continues ; Fonctions uniformément continues ; Fonctions lipschitziennes ; Liens entre les ensembles constitués de ces différentes fonctions

Propriétés topologiques des fonctions continues

- ✏ Images réciproques des ouverts et fermés par une fonction continue.
- ✏ Image d'un compact par une fonction continue.
- ✏ Continuité et densité : si deux applications continues coïncident sur une partie dense, elles sont égales
- ✏ Parties connexes par arcs.
- ✏ Image d'une partie connexe par arcs par une fonction continue.

Exemples d'applications continues

- ✏ Continuité des applications polynomiales (à une ou plusieurs variables).
- ✏ Caractérisation de la continuité d'une application linéaire (f continue ssi $\exists C > 0 \big| \forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant C\|x\|$).
- ✏ Caractérisation de la continuité d'une application multilinéaire (f continue ssi $\exists C > 0 \big| \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n, \|f(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \leqslant C\|x_1\|\,\|x_2\|\,\dots\|x_n\|$).

Suites de fonctions

Modes de convergence

- ✏ Convergence simple, convergence uniforme.
- ✏ Plan d'étude d'une suite de fonctions.

Exercices

Exercice 1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit f une application linéaire de E vers F. Alors les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue en tout point de E
2. f est continue en 0_E
3. f est bornée sur la boule fermée unité
4. $\exists k > 0, \forall v \in E, \left\|f(v)\right\|_F \leqslant k\left\|v\right\|_E$
5. f est lipschitzienne sur E

Exercice 2. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit f une application linéaire continue de E vers F.

1. Les quatre réels suivants existent et sont égaux :
   - $k_1 = \inf\left\{k > 0 \middle| \forall v \in E, \left\|f(v)\right\|_F \leqslant k\left\|v\right\|_E\right\}$
   - $k_2 = \sup\limits_{v \neq 0_E} \left\{\dfrac{\left\|f(v)\right\|_F}{\left\|v\right\|_E}\right\}$
   - $k_3 = \sup\limits_{\left\|v\right\|_E = 1} \left\{\left\|f(v)\right\|_F\right\}$
   - $k_4 = \sup\limits_{v \in \overline{B(0_E, 1)}} \left\{\left\|f(v)\right\|_F\right\}$
2. On considère l'application de $\mathscr{L}_c(E,F)$ vers $\mathbb{R}$ et qui à f associe k_1 définie au-dessus. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$, appelée norme subordonnée aux normes $\| \ \|_E$ de E et $\| \ \|_F$ de F, et notée $|||f||| = \inf\left\{k > 0 \middle| \forall v \in E, \left\|f(v)\right\|_F \leqslant k\left\|v\right\|_E\right\}$.
3. Montrer que : $\forall v \in E, \left\|f(v)\right\|_F \leqslant |||f|||.\left\|v\right\|_E$
4. Pour toute composée de $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}_c(F,G)$, on a $|||g \circ f||| \leqslant |||g||| \times |||f|||$

Exercice 3. Etudier la convergence simple et uniforme des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \cos\left(\dfrac{x+n}{n}\right) + \dfrac{1}{1+(x+n)^2}$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \dfrac{n\,x^3}{1+n\,x^2}$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = e^{-x}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, de dérivée seconde bornée. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$$

Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f'