Programme de Colle - Semaine n° 12

Du 14 décembre au 18 décembre

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él ‘eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe CCP"**, les questions de cours intègreront les exercices de banque CCP et toutes les autres questions de cours hormis celles notées **"E3A"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe E3A"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **E3A**

Pour compléter la question de cours, on pourra demander l'énoncé précis d'un résultat ou d'une définition, y compris lorsqu'il ne s'agit pas d'une question du groupe correspondant.

Fonctions : limite, continuité

Exemples d'applications continues

- ✏ Continuité des applications polynomiales (à une ou plusieurs variables).
- ✏ Caractérisation de la continuité d'une application linéaire (f continue ssi $\exists C > 0 \big| \forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant C\|x\|$).
- ✏ Caractérisation de la continuité d'une application multilinéaire (f continue ssi $\exists C > 0 \big| \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n, \|f(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \leqslant C\|x_1\| \|x_2\| \dots \|x_n\|$).

Suites de fonctions

Modes de convergence

- ✏ Convergence simple, convergence uniforme.
- ✏ Plan d'étude d'une suite de fonctions.
- ✏ Théorème de la double limite (admis).
- ✏ Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues (Dem. à connaitre).

Approximations uniformes

- ✏ Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux sur un segment.
- ✏ Approximation d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier.
- ✏ Approximation d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.
- ✏ Approximation d'une fonction continue sur un segment par des polynômes (admis).

Séries de fonctions

Modes de convergence

- ✏ Convergence simple, convergence normale, convergence uniforme.
- ✏ Plan d'étude d'une série de fonctions.
- ✏ Théorème d'interversion des signes somme et limite.
- ✏ Continuité de la somme uniforme d'une série de fonctions continues.

Intégration et dérivation

Intégration sur un segment

- ✏ Intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs dans F EVN de dimension finie
- ✏ Intégration des fonctions continues
- ✏ Sommes de Riemann.
- ✏ Comparaison des normes dans $\mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{C})$.
- ✏ Passage à la limite sous le signe $\displaystyle\int_{[a,b]}$, interversion des signes $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ et $\displaystyle\int_{[a,b]}$

Exercices et Questions de cours

1. $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (via le spectre de A ou via la continuité de det)
2. Une fonction continue d'un compact vers $\mathbb{R}$ est bornée et possède un maximum et un minimum.
   Version **"E3A"** : Montrer que si f est une fonction continue d'un compact K de E vers $\mathbb{R}$ alors f est majorée et qu'elle atteint son maximum
3. Deux fonctions continues coïncidant sur une partie dense sont égales
4. Si U ouvert non vide de E, $vect(U) = E$
5. Montrer que pour tout $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$.
6. Caractérisation de la continuité pour les applications linéaires (resp. bilinéaires ou multi-linéaires)
7. **TOUS** Continuité en a de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues en a
8. Lemme de Lebesgue. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(nt)\,dt = 0$
9. Approximation uniforme des fonctions continues par les fonctions en escalier.
10. Domaine de définition, continuité, limite aux bornes de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$
11. Convergence des sommes de Riemann : démonstration au choix du colleur :
    - ✏ cas général pour les fonctions continues (par morceaux)
    - ✏ cas des fonctions lipschitziennes
    - ✏ **"E3A"** cas des fonctions décroissantes (à valeurs dans $\mathbb{R}$)
12. **Banque CCP : Ex 8** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
    (a) i. Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente. **Indication** : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.
    ii. Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
    (b) i. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
    ii. Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
13. **Banque CCP : Ex 9**
    (a) Soit X un ensemble, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
    Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
    (b) On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}$.
    i. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
    ii. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
    iii. Soit $a > 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a; +\infty[$?
    iv. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?
14. **TOUS Banque CCP : Ex 10** On pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.
    (a) Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
    (b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.
15. **E3A** BANQUE CCP 43 Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n)$.
    (a) i. Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de x_0, le sens de variation de (u_n).
    ii. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
    (b) Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\mathrm{Arctan}\, x)$.

Prochain programme : Dérivation, Familles Sommables, Series entières

GROUPES DE COLLES
Groupe B :
AVELANGE (10) , BIHANNIC (10) , BOUGET (14) , GHATGHUT (les deux) (4 & 6)
KICHOUH (8) , LAFROGNE (12) , MAISONNETTE (16) , MARTEL (14) , MJAHED (8) , ROBIN (10) , SOUSA (14)
Groupe A : les autres