Programme de Colle - Semaine n° 17

Du 01 février au 06 février

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él ‘eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe CCP"**, les questions de cours intègreront les exercices de banque CCP et toutes les autres questions de cours hormis celles notées **"Groupe E3A"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe E3A"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **"Groupe E3A"**
Attention : deux questions de "cours" seront posées aux élèves des deux groupes : une question (courte $\sim$ 5 min) d'ordre pratique pour les élèves du groupe E3A (cette semaine : un changement de variable sur une intégrale), un énoncé précis d'un résultat du cours pour les autres + une question de cours usuelle.

Questions courtes (~ 8 min, d'ordre pratique) pour les élèves du groupe E3A

Déterminer la nature (convergence ou non convergence) des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}dx$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+3x)}}$
6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^2+x}$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx$
8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$

Questions courtes (~ 5 min, énoncé précis d'un résultat du cours) pour les élèves du groupe CCP

Donner (à l'écrit), l'énoncé précis du théorème suivant :

1. Théorème d'interversion des signes somme ($\sum$) et limite
2. théorème de dérivation d'une limite de suite de fonctions
3. Énoncé du théorème d'intégration terme à terme
4. Théorème de changement de variables dans une intégrale impropre
5. Énoncé du théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions
6. Énoncé du théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions
7. Énoncé du théorème de continuité sous domination
8. Théorème de sommation par paquets
9. Énoncé du théorème de dérivation des intégrales à paramètre (ou th. de Leinbiz)
10. Régularité de la somme d'une série entière.

Cours

Suites et séries de fonctions, familles sommables, séries entières

Tout ce qui a été vu : mode de convergence, opération, continuité, intégration, dérivation, familles sommables...

Intégration généralisée

- ✏ Intégrale convergente sur un intervalle quelconque
- ✏ Linéarité, additivité
- ✏ Intégrabilité d'une fonction sur un intervalle
- ✏ Intégrabilité des fonctions positives : comparaison, domination, équivalence.
- ✏ Fonctions de référence
- ✏ Intégration par parties et changement de variables sur les intégrales convergentes
- ✏ Théorème de convergence dominée pour les suites (ou séries ou familles) de fonctions
- ✏ Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

Intégrale dépendant d'un paramètre

- ✏ Théorème de continuité sous domination
- ✏ Théorème de Leibniz (ou théorème de dérivation des intégrales à paramètres). Extension aux dérivations k-ièmes.

Exercices et questions de cours

Si besoin, le colleur pourra rappeler que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. **E3A** Énoncé du théorème de changement de variables dans une intégrale impropre
2. **E3A** Énoncé du théorème d'intégration par parties généralisée
3. **E3A** Énoncé du théorème de convergence dominée
4. **E3A** Énoncé du théorème d'intégration terme à terme
5. **E3A** Énoncé du théorème de continuité sous domination
6. **E3A** Énoncé du théorème de dérivation des intégrales à paramètre (ou th. de Leinbiz)
7. **DEM** Existence et valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$
9. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$
10. Ensemble de définition, de continuité, de dérivabilité de la fonction Γ d'Euler.
11. Équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} e^{ixt}\, dt$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. (on trouvera $f'(x) = -- \dfrac{\alpha}{x+i} f(x)$)
12. **Banque CCP : Ex 25**
    (a) Démontrer que, pour tout entier n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
    (b) On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
13. **TOUS Banque CCP : Ex 26**
    Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} \mathrm{d}t$.
    (a) Justifier que I_n est bien définie.
    (b) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.
    (c) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?
14. **Banque CCP : Ex 30**
    (a) Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
    (b) Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, \mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
    (c) i. Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
    ii. Résoudre (E) .

Familles sommables, Intégrale sur un intervalle quelconque

GROUPES DE COLLES
Groupe E3A :
AVELANGE (10) , BIHANNIC (10) , BOUGET (14) , GHATGHUT (les deux) (4 & 6)
KICHOUH (8) , LAFROGNE (12) , MAISONNETTE (16) , MARTEL (14) , MJAHED (8) ,
ROBIN (10) , SOUSA (14)
Groupe CCP : les autres