Programme de Colle - Semaine n° 19

Du 15 février au 19 février

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él ‘eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe CCP"**, les questions de cours intègreront les exercices de banque CCP et toutes les autres questions de cours hormis celles notées **"Groupe E3A"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe E3A"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **"Groupe E3A"**
Attention : deux questions de "cours" seront posées aux élèves des deux groupes : une question (courte ~ 5 min) d'ordre pratique pour les élèves du groupe E3A (cette semaine : un changement de variable sur une intégrale), un énoncé précis d'un résultat du cours pour les autres + une question de cours usuelle.

Questions courtes (~ 8 min, d'ordre pratique) pour les élèves du groupe E3A

Déterminer la nature (convergence ou non convergence) des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}dx$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+3x)}}$
6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^2+x}$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx$
8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$

Nouveauté : Déterminer l'espérance et/ou la variance des variables aléatoires suivant l'une des 5 lois usuelles

Questions courtes (~ 5 min, énoncé précis d'un résultat du cours) pour les élèves du groupe CCP

Donner (à l'écrit), l'énoncé précis du théorème suivant :

1. théorème de dérivation d'une limite de suite de fonctions
2. Énoncé du théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions
3. Énoncé du théorème de continuité sous domination
4. Énoncé du théorème de continuité décroissante
5. Théorème de sommation par paquets
6. Énoncé du théorème de dérivation des intégrales à paramètre (ou th. de Leinbiz)
7. Régularité de la somme d'une série entière.
8. Définitions d'une tribu et d'une probabilité.

Cours

Intégrales dépendant d'un paramètre

Th. de convergence dominée, th. d'intégration terme à termes, continuité et dérivabilité des intégrales à paramètre.

Probabilités

Espaces probabilisés

- ✏ Espace probabilisable : tribu, système complet d'événements
- ✏ Probabilité : Théorème de continuité croissante , th. de continuité décroissante.
- ✏ Inégalité de Boole (ou sous-additivité)

- ✏ Famille des probabilités élémentaires : sur un univers fini ou dénombrable, la famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs de somme définit une unique probabilité
- ✏ Probabilité conditionnelle : définition, formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes
- ✏ Indépendance : famille d'événements mutuellement indépendants

Variables aléatoires discrètes

- ✏ Variable aléatoire discrète .Loi de probabilité d'une v.a.d.
- ✏ Couple de v.a.d. : lois marginales, loi conjointe, indépendance
- ✏ Indépendance mutuelle d'une famille finie de v.a.d. : lemme des coalitions
- ✏ Lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson

Espérance, Variance

- ✏ Espérance : définition, propriétés, formule de transfert
- ✏ Variance : Moments d'ordre m, variance, écart-type, Covariance, Loi faible des grands nombres
- ✏ Fonctions génératrices : définition, espérance et variance

Exercices et questions de cours

Si besoin, le colleur pourra rappeler que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. Inégalité de Boole (ou sous-additivité)
2. **TOUS** Théorème de continuité croissante
3. **TOUS** Espérance, variance, fonction génératrice des lois usuelles (une ou deux par élève...)
4. **TOUS** Inégalité de Markov
5. **TOUS** Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
6. Loi faible des grands nombres
7. **TOUS** Variance d'une somme de v.a.r.d. indépendantes
8. **E3A** Inégalité de Cauchy-Schwarz $(\mathbb{E}(XY))^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$
9. **TOUS** **Banque CCP MP**
   Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. *Remarque : les questions (a) et (b) sont indépendantes*
   (a) i. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   ii. En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $\forall m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p). Déterminer la loi de X.
10. **Banque CCP MP**
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
   On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
   On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

11. **Banque CCP 111**

    Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

    (a) Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
    On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
    On note R_X son rayon de convergence.

    i. Prouver que $R \geqslant 1$.
    On pose alors $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
    Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.

    Pour tout réel t fixé, exprimer G_X sous forme d'une espérance.

    ii. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.

    (b) i. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
    Déterminer D_{G_X} et, $\forall\, t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

    ii. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un mÃªme espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
    Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

12. **Banque CCP MP**
    Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :
    $\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathbb{P}\left((X = i) \bigcap (Y = j)\right) = \dfrac{1}{e\, 2^{i+1}\, j!}$.

    (a) Déterminer les lois de X et Y.

    (b) i. Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$

    ii. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$

    (c) les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

    (d) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$

Espaces préhilbertiens réels

GROUPES DE COLLES
Groupe E3A :
AVELANGE (10) , BIHANNIC (10) , BOUGET (14) , GHATGHUT (les deux) (4 & 6) KICHOUH (8) , LAFROGNE (12) , MAISONNETTE (16) , MARTEL (14) , MJAHED (8) , ROBIN (10) , SOUSA (14)
Groupe CCP : les autres