



---

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP**

---

**MATHÉMATIQUES**

**Jeudi 7 mai : 14 h - 18 h**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

**Les calculatrices sont interdites**

**Le sujet est composé de 5 exercices indépendants.**

## Exercice 1.

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = p q^k$$

où  $p \in ]0, 1[$  et  $q = 1 - p$ .

1. Vérifier que l'on définit ainsi des lois de probabilité.
2. Justifier que la variable aléatoire  $X$  possède une espérance et la calculer.
3. Calculer  $\mathbb{P}(X = Y)$  et  $\mathbb{P}(X < Y)$ .
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $S = X + Y$ .

## Exercice 2.

Pour tout réel  $x$  et tout entier naturel  $n$  non nul, on pose :  $P_n(x) = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right)$ ,

où  $\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ .

1. Montrer que pour tout  $x$  réel, la suite  $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.
2. Déterminer l'ensemble  $J$  des réels  $x$  pour lesquels la suite  $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente.  
On pourra utiliser la suite  $(\ln(P_n(x)))_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
3. Soit  $x \in J$ . On note  $\varphi(x)$  la limite de la suite  $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
  - 3.1. Étudier la parité et la monotonie de la fonction  $\varphi$  sur  $J$ .
  - 3.2. Démontrer que la fonction  $\varphi$  est continue sur  $J$ .
4.
  - 4.1. Prouver que la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\operatorname{ch}}$ .  
On pourra utiliser un changement de variables.
  - 4.2. En déduire l'intégrabilité de la fonction  $\frac{1}{\varphi}$ .

## Exercice 3.

### QUESTIONS DE COURS

1. On considère le trinôme du second degré à coefficients complexes  $aX^2 + bX + c$  dont on note  $s_1$  et  $s_2$  les racines.  
Donner sans démonstration les expressions de  $\sigma_1 = s_1 + s_2$  et de  $\sigma_2 = s_1 s_2$  à l'aide des coefficients  $a, b$  et  $c$ .
2. Soient  $a$  et  $b$  deux réels et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle définie par  $u_0 \in \mathbb{R}, u_1 \in \mathbb{R}$  et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

On note  $r_1$  et  $r_2$  les racines dans  $\mathbb{C}$  de l'équation caractéristique associée à cette suite.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer  $u_n$  en fonction de  $r_1, r_2$  et  $n$ .

On sera amené à distinguer trois cas et il n'est pas demandé d'exprimer les constantes qui apparaissent en fonction de  $u_0$  et de  $u_1$ .

On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des suites réelles  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  indexées par  $\mathbb{Z}$  telles que les sous-suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent.

On admettra que l'ensemble  $E$  des suites réelles indexées par  $\mathbb{Z}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

L'endomorphisme identité de l'espace  $E$  sera noté  $\text{id}_E$ .

On définit les applications  $S$  et  $T$  de  $\mathcal{C}$  dans  $E$  par :

$$\forall x \in \mathcal{C}, S(x) = z, \text{ avec } \forall n \in \mathbb{Z}, z_n = x_{-n}$$

et

$$\forall x \in \mathcal{C}, T(x) = y, \text{ avec } \forall n \in \mathbb{Z}, y_n = x_{n-1} + x_{n+1}.$$

1. Donner un exemple de suite non constante, élément de  $\mathcal{C}$ .
2. Montrer que  $\mathcal{C}$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $E$ .
3. Prouver que si une suite  $x$  est dans  $\mathcal{C}$ , elle est bornée.
4. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $\mathcal{C}$ . On admettra qu'il en est de même pour  $S$ .
5. Soient  $F = \{x \in \mathcal{C}, \forall n \in \mathbb{Z}, x_n = x_{-n}\}$  et  $G = \{x \in \mathcal{C}, \forall n \in \mathbb{Z}, x_n = -x_{-n}\}$ .  
Montrer que  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathcal{C}$ .
6. Étude de l'endomorphisme  $S$   
Prouver que  $S$  est une symétrie de  $\mathcal{C}$  dont on précisera les éléments caractéristiques.
7. Étude de l'endomorphisme  $T$   
On rappelle qu'une suite  $x$  est dans  $\mathcal{C}$  lorsque les deux sous-suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes.
  - 7.1. Soit  $\lambda$  un réel. Montrer que si  $\lambda \notin \{-2, 2\}$ ,  $\text{Ker}(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}$  où  $0_{\mathcal{C}}$  désigne le vecteur nul de  $\mathcal{C}$ .  
On pourra utiliser les questions de cours.
  - 7.2. L'endomorphisme  $T$  est-il injectif ?
  - 7.3. Déterminer  $\text{Ker}(T - 2 \text{id}_{\mathcal{C}})$  et  $\text{Ker}(T + 2 \text{id}_{\mathcal{C}})$ .
  - 7.4. Déterminer alors l'ensemble de toutes les valeurs propres de l'endomorphisme  $T$ .
8. On munit  $\mathcal{C}$  de la norme infinie : si  $x \in \mathcal{C}$ ,  $\|x\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|$ .

Soit  $N$  l'application qui à tout élément  $x$  de  $\mathcal{C}$ , associe  $N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$ .

- 8.1. Vérifier que pour tout  $x$  de  $\mathcal{C}$ ,  $N(x)$  existe.
- 8.2. Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur l'espace  $\mathcal{C}$ .
- 8.3. Montrer que  $S$  est une isométrie de l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{C}, N)$ . Est-elle continue ?
- 8.4. Prouver que dans cet espace normé, les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont des fermés.
- 8.5. Les deux normes  $\|\cdot\|_{\infty}$  et  $N$  sont-elles équivalentes ?

## Exercice 4.

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on note  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et on pose, pour tout couple  $(P, Q) \in E^2$ ,

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

1. Démontrer que l'on définit ainsi sur  $E$  un produit scalaire.  
Dans la suite de cet exercice,  $E$  est l'espace euclidien  $\mathbb{R}_n[X]$  muni de ce produit scalaire.
2. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $p$ . Donner sans démonstration la dimension de  $F^\perp$ .
3. On prend dans cette question  $n = 2$ .  
Déterminer une base du sous-espace  $(\mathbb{R}_1[X])^\perp$ .
4. On revient au cas général :  $n \geq 2$  et soit  $L \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$  non nul.
  - 4.1. Déterminer le degré de  $L$ .
  - 4.2. On pose, lorsque cela est possible, pour  $x$  réel :  $\varphi(x) = \int_0^1 L(t) t^x dt$ .
    - 4.2.1. Montrer que  $\varphi$  est une fonction rationnelle.
    - 4.2.2. Déterminer les zéros et les pôles de  $\varphi$ . Donner pour chacun son ordre de multiplicité.  
On pourra examiner les degrés du dénominateur et du numérateur de la fonction rationnelle  $\varphi$ .
    - 4.2.3. En déduire une expression de  $\varphi$ , à une constante multiplicative près, faisant apparaître le numérateur et le dénominateur sous forme factorisée.
  - 4.3. En utilisant une décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle  $\varphi$ , donner une base de  $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ .

## Exercice 5.

Soit  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite réelle convergente de limite  $\ell$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit sur  $[0, 1]$  la fonction en escalier  $f_n$  par :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall t \in \left[ \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], f_n(t) = w_k \text{ et } f_n(1) = w_n.$$

1. Déterminer  $\int_0^1 f_n(t) dt$ .
2. Prouver que l'on a pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $f_n(t) = w_{\lfloor nt \rfloor + 1}$  où  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière du réel  $x$ .
3. En déduire pour tout  $t \in [0, 1]$ , la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)$ .
4. Prouver alors que l'on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k = \ell$ .

\* \* \* \* \*

**FIN**