

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants.

Exercice 1.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?
2. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?
3. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

Soient x un réel positif ou nul et φ_x la fonction qui à un réel $t \in \mathbb{R}_+$, associe $\varphi_x(t) = \frac{e^{-t}}{1 + xt}$.

On pose alors, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt$.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur \mathbb{R}_+ .
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R}_+ .
On pourra comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour deux éléments x et y de \mathbb{R}_+ tels que $x < y$.
3. Limite de f en l'infini
 - 3.1. Démontrer que la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ .
 - 3.2. Déterminer la valeur de ℓ .
 - 3.3. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 3.

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n \leq 1$.
2. On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

3.

3.1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.

3.2. Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

3.3. On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, produit de Cauchy réel des deux séries $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.

Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n , une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n) .

3.4. En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

4. Démontrer alors que pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

5. En déduire, pour tout $x \in [0, 1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

6. Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 4.

1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M \neq \frac{1}{2}I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n.$$

- 1.1. On note $F = \text{Vect}(I_n, M, M^2)$. Prouver que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.

Déterminer la dimension de F et en donner une base.

- 1.2. Vérifier que F est stable pour la multiplication des matrices.

- 1.3. Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \frac{1}{2}I_n$.

Justifier que $\mathcal{B} = (A, B)$ constitue une base de F .

Déterminer les composantes des matrices AB , BA , A^2 et B^2 dans la base \mathcal{B} .

- 1.4. Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant : $T^2 = M$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, 2\mathbb{P}(X = n + 2) = 3\mathbb{P}(X = n + 1) - \mathbb{P}(X = n).$$

- 2.1. On note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. Exprimer p_n en fonction de n .

En déduire la loi de la variable aléatoire X .

- 2.2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et une variance et les calculer.

Exercice 5.

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E , on pose :

$$\langle P|Q \rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

- Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
- Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
- Déterminer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.
- Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.
 - Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E . Quelle est sa dimension ?
 - Soit φ la projection orthogonale sur H . Déterminer la matrice de φ dans la base \mathcal{B} .

* * * * *

FIN