REDUCTION EN DIMENSION FINIE

Exercice 1. Soit $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ défini par : $T(P) = (8+3X)P - \left(5X - X^2\right)P' + \left(X^2 - X^3\right)P''$.

1. Calculer $T\left(X^n\right)$ pour tout entier naturel n.
2. Montrer qu'il existe un unique $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{R}_k[X]$ soit stable par T. Montrer que l'endomorphisme induit par T sur $\mathbb{R}_k[X]$ est diagonalisable et déterminer une base propre.

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui à $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe $M' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Montrer que f est diagonalisable et déterminer une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ propre pour f.

Exercice 3. Soit $L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ une matrice ligne non nulle et $A = {}^t L \times L \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ matrice représentant $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n\right)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Déterminer le rang de u, son image, son noyau, ses sous-espaces et valeurs propres.
u est-il diagonalisable ? Quel est son polynôme caractéristique ?

Exercice 4. E est un $\mathbb{K}-$ev de dimension finie et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ avec $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que tout sous-espace propre de g est stable par f.
2. On suppose f et g diagonalisables. Montrer que les endomorphismes induits par f sur les sous-espaces propres de g sont diagonalisables. En déduire que f et g ont une base propre commune

Exercice 5. f, u et v sont trois endomorphismes d'un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe deux scalaires α et β tels que : $\begin{cases} f &= \alpha\, u + \beta\, v \\ f^2 &= \alpha^2\, u + \beta^2\, v \\ f^3 &= \alpha^3\, u + \beta^3\, v \end{cases}$
Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 6. Soit $M \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ décrite par blocs de taille n : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$.
Montrer que $\chi_M = \chi_{(A+B)} \cdot \chi_{(A-B)}$

Exercice 7. Soit M une matrice de $GL_n(\mathbb{C})$ telle que M^2 soit diagonalisable.
Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 8. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$.
Calculer B^2 puis montrer que si A est inversible et diagonalisable, B est inversible et diagonalisable.

Exercice 9. Diagonaliser $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Montrer que $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 10. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On définit $M \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ par $M = \left(m_{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n}$ où $m_{ij} = a$ si $i+j$ est pair, et $m_{ij} = b$ si $i+j$ est impair.
Déterminer le rang de M selon les valeurs de (a, b), puis prouver que M est diagonalisable.

Exercice 11. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr}(A) \neq 0$. On définit f endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \operatorname{tr}(A).M - \operatorname{tr}(M).A$. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 12.

1. Soit D une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les termes diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que $\left(I_n, D, D^2, \ldots, D^{n-1}\right)$ constitue une base de $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, la $\mathbb{K}-$algèbre des matrices diagonales de taille n
2. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres distinctes.
   On pose : $\mathcal{C}(A) = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \middle| \, AM = MA\right\}$.
   Montrer que $\mathcal{C}(A) = \mathbb{K}[A]$ et préciser la dimension de cette algèbre.

Exercice 13. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p dans un $\mathbb{K}-$ev de dimension n.

1. Montrer qu'il existe au moins un vecteur x de E tel que $\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\right)$ soit une famille libre de E. Quel résultat liant n et p retrouve-t-on ainsi ?
2. On suppose $n = p$. Montrer l'existence d'une base de E dans laquelle u a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire le rang de u

Exercice 14. Soit u un endomorphisme trigonalisable. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme : $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_q \end{pmatrix}$, chaque matrice A_k étant triangulaire avec tous ses termes diagonaux égaux

APPLICATIONS DE LA REDUCTION

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer χ_A.
2. Calculer $\operatorname{rg}(A - I_5)$. En déduire une expression simple, sous forme de produit matriciel, des matrices A^p (avec $p \in \mathbb{N}$) et e^A.
3. A partir uniquement du 1, calculer π_A et retrouver le fait que A soit diagonalisable.
   Donner une expression simple, sous forme de combinaison linéaire des matrices $(A + I_5)(A - I_5)$, $(A + I_5)(A - 3I_5)$ et $(A - 3I_5)(A - I_5)$, des matrices A^p (avec $p \in \mathbb{N}$) et e^A.

Exercice 16. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances et l'exponentielle de A de deux manières.

Exercice 17. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_A, en déduire π_A. A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
2. Montrer sans calcul que $B = A - I_3$ est nilpotente. En déduire A^p et $\exp(A)$ en fonction de I_3 et B

3. Trigonaliser A

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les puissances et l'exponentielle de A.
2. Trigonaliser A

Exercice 19. Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est trigonalisable mais pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$
2. Montrer qu'il existe un matrice inversible $P \in Gl_3(\mathbb{R})$ telle que $A' = P^{-1}\ A\ P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $N = B - I_2$ soit nilpotente. En déduire les puissances et l'exponentielle de A' en fonction de N
3. Déterminer explicitement P, B, A', les puissances et l'exponentielle de A'

Exercice 20. Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. On cherche $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}\ A\ P$ soit diagonale.
2. Montrer que si $B^2 = A$ alors B commute avec A et a les mêmes sous-espaces propres que A. En déduire que $P^{-1}BP$ est diagonale.
3. Résoudre l'équation $B^2 = A$.
4. Généraliser en résolvant l'équation $B^2 = A$ lorsque χ_A est scindé à racines simples.

Exercice 21. Reprendre l'exercice 20 et résoudre l'équation $B^2 = A$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 22. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que toute matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui est solution de l'équation (E) : $M^2 + M = A$ est annulée par un polynome scindé à racines simples. Résoudre (E)

Exercice 23. On cherche à déterminer les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_n + 4y_n + 2z_n = x_{n+1} \\ \quad\ \ -3y_n - 2z_n = y_{n+1} \\ \quad\ \ \ \ 4y_n + 3z_n = z_{n+1} \end{cases}$$

1. Soit $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ Déterminer une matrice A telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = A\ U_n$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$.
2. Calculer A^n et en déduire x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0 et z_0

Exercice 24. On cherche à déterminer les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n$

1. Soit $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$ Déterminer une matrice A telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = A\ U_n$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$.
2. Calculer A^n et en déduire x_n en fonction de x_0, x_1 et x_2

Exercice 25. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}-$ev E.

1. Montrer que $Com(u) = \left\{v \in \mathcal{L}(E) \middle|\ u \circ v = v \circ u\right\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ qui contient $\mathbb{K}[u]$
2. u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   Montrer que u est diagonalisable et déterminer une base $\mathcal{B}$ propre pour u.
   Montrer que : $v \in Com(u) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est diagonale. En déduire la dimension de $Com(u)$ et montrer $Com(u) = \mathbb{K}[u]$
3. Généraliser les résultats du 2 aux endomorphismes d'un espace de dimension finie dont le polynome caractéristique est scindé à racines simples

Exercice 26. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = 1$ lorsque $j = i+1$ ou $j = i-1$, et $a_{ij} = 0$ sinon. Soit P_n le polynome caractéristique de A. Pour $\theta \in]0, \pi[$, montrer que la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}} = (P_n(-2\cos\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait une relation de récurrence linéaire. Calculer explicitement δ_n, en déduire les valeurs propres de A et montrer que A est diagonalisable.

Exercice 27. On donne A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que B soit nilpotente et $AB = BA$.

1. Prouver que $\det(B + I_n) = 1$.
2. Prouver que $\det(A + B) = \det(A)$

Exercice 28. Banque CCP MP

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. D{eterminant, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Exercice 29. commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, supposé diagonalisable. On note $\mathcal{C}_u$ le commutant de u, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u.
Montrer que $\mathcal{C}_u$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Calculer sa dimension.

Indications : soit $v \in \mathscr{L}(E)$. Si u et v commutent, alors les sous-espaces propres de u ...etc ...Puis travailler avec la matrice de u dans une base adaptée

Exercice 30. diagonalisation simultanée

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soient u, v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent i.e. $u \circ v = v \circ u$.
Montrer que u et v sont simultanément diagonalisables, autrement dit qu'il existe une base commune de diagonalisation.

Indications : raisonner par récurrence sur la dimension de E.

PRATIQUE DE LA DIAGONALISATION

Exercice 31. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondant. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 32. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A.

Exercice 33. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de A. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 34. On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Si oui, les réduire.

Exercice 35. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Est-elle diagonalisable ? Justifier. Écrire alors M sous une forme plus simple.

Exercice 36. Lorsque c'est possible, diagonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 37. Pour quelles valeurs de $(a, b, c) \in \mathbb{C}^2$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

On ne cherchera pas à réduire explicitement A.

Exercice 38. Soit u l'application suivante :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{array}$$

Montrer que u est bien définie et linéaire. Déterminer les valeurs propres de u, et, si c'est possible, diagonaliser u.

Exercice 39. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A, alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A. De même, montrer que si x est un vecteur propre complexe de A, alors $\bar{x}$ (où $\bar{x}$ désigne le vecteur dont les composantes sont les conjuguées des composantes de x) est aussi un vecteur propre complexe de A.
Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 40. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables, triangularisables ? Si oui, les réduire.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 41. Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E et P un polynôme. Montrer que $P(f)$ est diagonalisable.

Exercice 42. Soit P_0 un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, et f l'application suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & R = \text{ reste de la division euclidienne de } P \text{ par } P_0 \end{array}$$

A l'aide d'un polynôme annulateur de f, montrer que f est diagonalisable.

Exercice 43. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables, triangularisables, sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$? Lorsqu'elles sont diagonalisables, donner une matrice diagonale semblable.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Réduire explicitement A et C.

Exercice 44. Soit $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J \\ \hline J & 0 \end{array}\right)$. Calculer A^2, puis A^3. A l'aide d'un polynôme annulateur de A, montrer que A est diagonalisable.
Sans chercher à calculer le polynôme caractéristique de A, donner un ensemble fini contenant toutes les valeurs propres de A, puis donner les valeurs valeurs propres elles mêmes ainsi que leurs multiplicités. En déduire le polynôme caractéristique de A.

Exercice 45. Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables, triangularisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A l'aide du polynôme caractéristique de B, calculer B^{-1}.

Exercice 46. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère l'application linéaire suivante :

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(0)X^3 + P'(0)X^2 + \frac{1}{2}P''(0)X + \frac{1}{6}P'''(0) \end{array}$$

1. Ecrire la matrice A de u dans la base canonique. Calculer A^2.
2. u est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de $\mathbb{R}_3[X]$ formée de vecteurs propres de u.