NORMES

Exercice 1. Dans $E = \mathbb{R}^2$, on pose, pour $X = (x, y)$, $N(X) = \text{Sup}(\ |x|\ ,\ |y|\ ,\ |x - y|\ )$
Montrer que N est une norme et représenter dans le plan les vecteurs $X = (x, y)$ tels que $N(X) = 1$.

Exercice 2. N_1 et N_2 sont deux normes d'un espace vectoriel E et on pose $B_i = \{x \in E \ / \ N_i(x) < 1\}$.
On suppose que $B_1 = B_2$ et on veut montrer que $N_1 = N_2$:

1. Montrer que $\forall x \in E$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{N_1(x) + t}.x \in B_1$, en déduire que $N_2(x) \leqslant N_1(x) + t$
2. Montrer que $\forall x \in E$, $N_2(x) \leqslant N_1(x)$. Conclure en montrant que $N_1 = N_2$.

Exercice 3. Banque CCP MP On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
Pour tout $P \in E$, on pose : $N_1(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \displaystyle\max_{i \in [\![0,n]\!]} |a_i|$ où $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$

1. (a) Démontrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$
   (b) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1
   (c) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$. Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

Exercice 4. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme infinie $\|.\|_\infty$ définie par : Si $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|X\|_\infty = \displaystyle\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $|||A||| = \displaystyle\sup_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||$ est bien définie.
2. Montrer que l'application $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie : pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||AB||| \leqslant |||A||| \times |||B|||$
3. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A||| = \displaystyle\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$

Exercice 5. Pour tout P de $\mathbb{R}[X]$, on pose $N(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |\ P^{(k)}(0)\ |$. Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, et $a_0,\ a_1,\ \ldots a_k,\ \ k+1$ réels distincts. Pour $P \in E$, on pose $N(P) = |\ P(a_0)\ | + |\ P(a_1)\ | + \ldots + |\ P(a_k)\ |$.

1. Montrer que N est une application vérifiant l'axiome d'homogénéité et l'inégalité triangulaire.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur k pour que N soit une norme.

Exercice 7. $\ell^\infty(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des suites bornées de nombres complexes.

1. Pour $u = (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{C})$, on pose $N_\infty(u) = \text{Sup}\{|u_n|,\ \ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que N_∞ est une norme d'algèbre dans $\ell^\infty(\mathbb{C})$.

   On désigne par E le sous-ensemble de $\ell^\infty(\mathbb{C})$ constitué des suites dont le premier terme est nul.
2. Montrer brièvement que E est un $\mathbb{C}$ev.
3. Pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E, on pose $N(u) = \sup\{|\ u_{n+1} - u_n\ |,\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que (E, N) est un espace vectoriel normé.
4. Montrer que : $\forall u \in E$, $N(u) \leqslant 2N_\infty(u)$ et : $\exists u \in E \setminus \{0\}$, $N(u) = 2N_\infty(u)$.
5. Montrer que les deux normes N et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 8. E désigne ici le $\mathbb{C}$ev $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes.
Pour $P = \sum a_n X^n$ élément de E, on pose :

$$N_1(P) = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\ a_k\ |, \qquad N_2(P) = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{N}} |\ a_k\ |^2}, \qquad N_\infty(P) = \text{Sup}\ \{|\ a_k\ |,\ k \in \mathbb{N}\}$$

Prouver que l'on définit ainsi trois normes et montrer que N_1 et N_2 (respectivement N_1 et N_∞, N_∞ et N_2) ne sont pas équivalentes.

Exercice 9. Soit $E = \mathcal{C}^0([0;\pi],\mathbb{R})$. On pose, pour $f \in E$, $N(f) = \displaystyle\int_0^\pi |f(t)| \sin t dt$

1. Montrer que N est une norme. Déterminer des constantes b et β strictement positives telles que :
$$\forall f \in E,\ \ N(f) \leqslant bN_1(f) \text{ et } N(f) \leqslant \beta N_\infty(f).$$

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit f_n sur $[0,\pi]$ par : $f_n(x) = 1 - nx$ si $x \in [0, \dfrac{1}{n}]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

2. Calculer $N(f_n)$, $N_1(f_n)$ et $N_\infty(f_n)$ puis montrer que N n'est équivalente ni à N_1 ni à N_∞.

Exercice 10. En utilisant l'équivalence des normes en dimension finie, prouver que :
$\text{Inf}\{\displaystyle\int_0^1 \mid P(t) \mid dt,\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ P \text{ unitaire}\}$ est un réel non nul.

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $N(x,y) = \sup\{\mid x + ty \mid,\ t \in [0;1]\}$.

1. Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $y > 0$, étudier les variations sur $[0,1]$ de $t \to x + ty$, puis de $t \to |x + ty|$ et représenter la boule unité pour la norme N i.e. $\{(x,y)\ /\ N(x,y) \leqslant 1\}$

Exercice 12. Pour toute matrice $A = \left(\ a_{ij}\ \right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\parallel A \parallel = \displaystyle\sup_{i \in <1,n>} \left\{\ \sum_{i=1}^n \mid a_{ij} \mid,\ j \in [1;n]\ \right\}$.

1. Montrer que l'on définit ainsi une norme d'algèbre.
2. Montrer qu'en posant $N(A) = \displaystyle\sup_{(i,j)\in <1,n>^2} \{\mid a_{ij} \mid\}$, on définit une norme dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas une norme d'algèbre (utiliser par exemple la matrice J dont tous les termes valent 1).

Exercice 13. Soit E un espace euclidien et x un vecteur de E. Montrer que $\|x\| = \displaystyle\sup_{\|y\|\leqslant 1} |(x|y)|$.

TOPOLOGIE DANS UN EVN

Exercice 14. A et B étant deux parties non vides d'un espace vectoriel normé (E,N), justifier l'existence de :
$\delta(A,B)$=Inf$\{d(a,b),\ (a,b) \in A \times B\}$ et donner un exemple de parties A et B disjointes telles que $\delta(A,B) = 0$.

Exercice 15. A et B sont deux parties non vides d'un espace vectoriel normé (E,N) avec A bornée.

1. Montrer que $\{d(a,b),\ \ (a,b) \in A^2\}$ admet une borne supérieure. Celle-ci est par définition le diamètre de A, noté diam(A).
2. Exemple : Soit r un réel strictement positif et a un vecteur de E. Démontrer que le diamètre de la boule fermée de centre a et de rayon r vaut $2r$.
3. Quel est le diamètre de la sphère de centre a et de rayon r ?

Exercice 16. Soient A et B des parties d'un espace vectoriel normé (E,N).

1. Montrer que : $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$
2. Montrer que : $\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$
3. Montrer que $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overbrace{A \cup B}^{\circ}$ et donner un exemple (dans $\mathbb{R}$ par exemple) où cette inclusion est stricte.

Exercice 17. Soient A et B des parties d'un espace vectoriel normé (E,N).

1. Montrer que : $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
2. Comparer par l'inclusion $\overline{A \cap B}$ avec $\overline{A} \cap \overline{B}$ puis $\overline{A} \cup \overline{B}$ avec $\overline{A \cup B}$.

Exercice 18. A est une partie non vide et bornée d'un E.V.N. Montrer que $\overline{A}$ est bornée et Diam(A) = Diam$(\overline{A})$ (le diamètre d'une partie bornée est défini à l'exercice 15).

Exercice 19. A est une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E,N). Montrer que si A est convexe, son adhérence et son intérieur sont également convexes.

Exercice 20. On se place dans un espace vectoriel normé (E,N).

1. Montrer que si $\Omega \subset E$ est un ouvert, alors $\Omega \subset \mathring{\overline{\Omega}}$.

2. Montrer que si $H \subset E$ est un fermé, alors $\overline{\mathring{H}} \subset H$.
3. Exhiber une partie A de $\mathbb{R}$ pour laquelle : $A,\ \bar{A},\ \mathring{A},\ \mathring{\overline{A}},\ \overline{\mathring{A}},\ \overline{\mathring{\overline{A}}}, \mathring{\overline{\mathring{A}}}$, sont deux à deux distinctes, puis prouver que l'on ne peut pas faire mieux.

Exercice 21. Dans un espace vectoriel normé (E, N), soient U et V deux ouverts denses dans E, montrer que $U \cap V$ est un ouvert dense dans E.

Exercice 22. A est une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E, N).
1. Montrer que : $\mathring{A} = A \Leftrightarrow A \cap Fr(A) = \emptyset$.
2. Montrer que : $\overline{A} = A \Leftrightarrow Fr(A) \subset A$.

Exercice 23. A et B sont deux parties d'un espace vectoriel normé (E, N) qui sont denses dans E
1. Montrer que si A et B sont disjointes, alors A et B sont d'intérieur vide.
2. Montrer que si de plus A est un ouvert, alors $A \cap B$ est dense dans E.

Exercice 24. Montrer que si A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé, son adhérence et son intérieur sont également convexes.

Exercice 25. A est une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E, N).
1. Montrer que : $\forall x \in E,\ d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.
2. Prouver que : $\forall x \in E,\ d(x, A) = d(x, \overline{A})$

Exercice 26. $A = \left\{ \ (-1)^n + \frac{1}{n+1},\ \ n \in \mathbb{N}^* \ \right\}$ est-il fermé ? Quelle est son adhérence ?

Exercice 27. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E. Que se passe-t-il si F est de dimension finie

Exercice 28. A et B sont deux parties denses d'un espace vectoriel normé.
1. Montrer que si elles sont disjointes, elles sont d'intérieur vide.
2. Montrer que si l'une d'elles est un ouvert, alors $A \cap B$ est dense.

COMPACTS

Exercice 29. On donne une suite (u_n) de réels positifs.
1. Montrer que si (u_n) ne diverge pas vers $+\infty$, (u_n) a au moins une valeur d'adhérence.
2. Montrer que si (u_n) est non majorée, (u_n) a une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 30. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
1. Montrer que si A est fermée et majorée, alors A admet un maximum.
2. Montrer que si A est compacte, alors A possède un maximum et un minimum.

Exercice 31. On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est fermé. Est-il compact ?
2. Montrer que $SO(2)$ (matrices orthogonales de déterminant 1) est compact.

Exercice 32. Si A et B sont deux parties d'un espace vectoriel normé (E, N), on pose $A + B = \left\{ \ a + b,\ a \in A \text{ et } b \in B \ \right\}$.
1. Montrer que : A fermé et B compact $\Rightarrow A + B$ fermé.
2. Montrer que : A et B compacts $\Rightarrow A + B$ compact.
3. Donner un exemple de parties fermées A et B pour lesquelles $A + B$ n'est pas fermé.

Exercice 33. On norme $E = \mathbb{R}[X]$ en posant $N_\infty \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \right) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \mid a_k \mid$.
1. Montrer que dans (E, N_∞) la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de valeur d'adhérence.
2. Que peut-on en conclure concernant la boule unité et la sphère unité de (E, N_∞) ?

Exercice 34. Dans un E.V.N. E, on donne une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties compactes et non vides que l'on suppose décroissante ($\forall n,\ A_{n+1} \subset A_n$). Montrer que l'intersection de cette famille est un compact non vide de E.

Exercice 35. Soit (x_n) une suite de réels non majorée. Montrer que l'on peut extraire de (x_n) une suite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 36. 1. (a_n) est une suite de réels positifs qui ne diverge pas vers $+\infty$.

(a) Montrer que (a_n) admet une sous-suite bornée.

(b) Montrer que (a_n) admet une sous-suite convergente.

2^o) (x_n) est une suite de rationnels positifs qui converge vers un irrationnel a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on écrit sous forme irréductible $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, $(p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que (q_n) et (p_n) divergent vers $+\infty$.

Exercice 37. (u_n) est une suite d'un espace vectoriel normé (E, N). Soit $L \in E$, montrer que L est valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ \exists p \in \mathbb{N},\ \ p \geqslant n\ \ /\ \ N(u_p - L) < \varepsilon$$

Exercice 38. Soit A une partie compacte non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que A a un minimum et un maximum.

Exercice 39. A et B sont deux parties non vides d'un espace vectoriel normé.

1. Justifier l'existence de $d(A, B) = \mathrm{Inf}\{d(a, b), (a, b) \in A \times B\}$.
2. Montrer l'existence de suites $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in B^{\mathbb{N}}$ telles que $d(A, B) = \lim\limits_{n\to\infty} N(b_n - a_n)$.
3. Montrer que si A et B sont compacts, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $d(A, B) = N(b - a)$.
4. Montrer que si A et B sont compacts, $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$. Donner un exemple de fermés A et B disjoints tels que $d(A, B) = 0$.

Exercice 40. Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé. Montrer que : $\exists (a, b) \in K^2 /\ \mathrm{diam}(K) = d(a, b)$.

Exercice 41. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que $E_{(a,b)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ \ /\ \ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 42. Montrer que l'ensemble des matrices carrées de taille p dont les coefficients sont positifs et de somme égale à 1 constitue une partie compacte de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Exercice 43. $E = \mathbb{R}[X]$ est normé par $\left\| \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \right\| = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mid a_k \mid$. Pour tout entier n, on pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} X^k$.
Montrer, en utilisant la suite (P_n) que dans $(E, \|.\|)$, la boule unité n'est pas compacte. Construire un autre exemple de suite bornée sans valeur d'adhérence.

Exercice 44. $E = \mathscr{C}^0([0, 2], \mathbb{R})$ est normé par la norme de la convergence uniforme.

$\forall n > 0$, on définit f_n élément de E par : $\begin{cases} f_n(t) = 1 \text{ si } t \in [0; \frac{1}{2}] \\ f_n(t) = 0 \text{ si } t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}; 2] \\ f_n \text{ est affine sur } [\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \end{cases}$

1. Soit φ une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On suppose que $(f_{\varphi(n)})$ est convergente vers f dans (E, N_∞).
   (a) Montrer que : $\forall x \in [0, 2],\ \ |f(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \leqslant N_\infty(f - f_{\varphi(n)})$. En déduire que $\forall x \in [0, \dfrac{1}{2}],\ \ f(x) = 1$.
   (b) Soit $x > \dfrac{1}{2}$. Montrer l'existence d'un rang n_1 au delà duquel $x \in [\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\varphi(n)}; 2]$. En déduire que $f(x) = 0$.
2. Montrer que la boule unité de (E, N_∞) n'est pas compacte.

Exercice 45. Théorème de Riesz

1. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un EVN E.
   (a) Montrer que pour tout $a \in E$, il existe $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|a - x\|$
   (b) On suppose $F \neq E$. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $d(a, F) = 1$ et $\|a\| = 1$.
2. On suppose que E est de dimension infinie.
   Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E tels que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \|a_n\| = 1$ et $d\left(a_{n+1}, \mathrm{Vect}\left(a_0, \ldots, a_n\right)\right) = 1$.
   Conclure que la boule fermé unité de E n'est pas compacte.
3. En déduire le théorème de Riesz : *Soit E un EVN. Alors :*
   La boule fermée unité de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.