Programme de Colle - Semaine n$^{\text{o}}$ 08

Du 22 novembre 2021 au 26 novembre 2021

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él ‘eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"B"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B**
Pour compléter la question de cours, on pourra demander l'énoncé précis d'un résultat ou d'une définition, y compris lorsqu'il ne s'agit pas d'une question du groupe correspondant.

Espaces vectoriels normés

Normes et distances

- ✏ Définition de norme
- ✏ Normes usuelles dns $\mathbb{K}^n$, normes usuelles dans $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$
- ✏ Transport d'une norme, norme d'un espace produit, norme d'algèbre
- ✏ Normes équivalentes : Définition, exemples. En dimension finie toutes les normes sont équivalentes
- ✏ Distance. Distance d'un point à une droite
- ✏ Boules et sphères, parties bornées, parties convexes

Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

- ✏ Généralités sur les suites, suites bornées.
- ✏ Suites convergentes. Lien avec l'équivalence de normes
- ✏ Suites à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.
- ✏ Suites dans un espace produit

Eléments de topologie dans un espace vectoriel normé

- ✏ Voisinages d'un point. Ouvert, intérieur
- ✏ Fermés, adhérence. Densité. Frontière
- ✏ Topologie induite sur une partie d'un EVN

Partie compacte d'un espace vectoriel normé

- ✏ Valeurs d'adhérence d'une suite.
- ✏ Théorème de Bolzano Weierstrass dans un EVN de dimension finie
- ✏ Parties compactes. Définition, propriétés.
- ✏ Caractérisation en dimension finie

Exercices et questions de cours

1. **Groupe B** Normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$: définition. Pour une d'entre elles, au choix de l'interrogateur, montrer que c'est une norme. Les comparer.
2. **TOUS** Normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$: définition. Pour une d'entre elles, au choix de l'interrogateur, montrer que c'est une norme. Les comparer.
3. $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. **TOUS** Si A est une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E,N) et x un point de E, alors $d(x,A)=d(x,\overline{A})$.
5. **TOUS** Si A est une partie non vide bornée d'un espace vectoriel normé (E,N) alors $\overline{A}$ est bornée et $\text{Diam}(A)=\text{Diam}(\overline{A})$.
6. Si A est une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E,N) et x un point de E, alors $d(x,A)=0 \Longleftrightarrow x\in\overline{A}$.
7. En dimension finie, les compacts sont les parties fermées bornées.
8. **TOUS** BANQUE CCP 37
   On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose, $\forall\, f\in E$, $N_\infty(f)=\sup\limits_{x\in[0;1]}|f(x)|$ et $N_1(f)=\displaystyle\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x$.
   (a) i. Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.

ii. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.

iii. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.

(b) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

9. BANQUE CCP 34

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.

(a) Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.

(b) Démontrer que : $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

(c) Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(d) Démontrer que, si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

10. BANQUE CCP 38

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

$\forall\, P \in E$, on pose $N_1(P) = \sum\limits_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$ où $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.

(a) i. Démontrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

ii. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.

iii. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

(b) On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynÃ´mes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.

Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

11. **TOUS** BANQUE CCP 44

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

(a) i. Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.

ii. Montrer que $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

(b) Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Remarque : Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

(c) i. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

ii. Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Prochain programme : Espaces vectoriels normés

GROUPES DE COLLES

Groupe B : classés par ordre croissant des groupes de colles

DUPASQUIER (2) & FADAT & GUILLEN : (2) , AIT BRICK (4) , ROYNEAU (6) , GILLET (7) ?

CHAPUIS LE BERRE (8) & THIESSELIN (8) , GRENON (10) & GUYOMARD (10) , KERLAU (11)

Groupe A : les autres