Programme de Colle - Semaine n° 09

Du 29 novembre 2021 au 03 décembre 2021

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él ‘eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"B"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B**
Pour compléter la question de cours, on pourra demander l'énoncé précis d'un résultat ou d'une définition, y compris lorsqu'il ne s'agit pas d'une question du groupe correspondant.

Espaces vectoriels normés

Normes et distances

- ✏ Définition de norme
- ✏ Normes usuelles dns $\mathbb{K}^n$, normes usuelles dans $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$
- ✏ Transport d'une norme, norme d'un espace produit, norme d'algèbre
- ✏ Normes équivalentes : Définition, exemples. En dimension finie toutes les normes sont équivalentes
- ✏ Distance. Distance d'un point à une droite
- ✏ Boules et sphères, parties bornées, parties convexes

Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

- ✏ Généralités sur les suites, suites bornées.
- ✏ Suites convergentes. Lien avec l'équivalence de normes
- ✏ Suites à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.
- ✏ Suites dans un espace produit

Eléments de topologie dans un espace vectoriel normé

- ✏ Voisinages d'un point. Ouvert, intérieur
- ✏ Fermés, adhérence. Densité. Frontière
- ✏ Topologie induite sur une partie d'un EVN

Partie compacte d'un espace vectoriel normé

- ✏ Valeurs d'adhérence d'une suite.
- ✏ Théorème de Bolzano Weierstrass dans un EVN de dimension finie
- ✏ Parties compactes. Définition, propriétés.
- ✏ Caractérisation en dimension finie

Séries dans un espace vectoriel normé

- ✏ Terme général, somme partielle.
- ✏ Série convergente, somme, restes partiels
- ✏ Convergence absolue
- ✏ Exponentielle d'une matrice

Fonctions : limite, continuité

Fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: rappel

- ✏ Limite finie/infinie en un point a fini/infini
- ✏ Limites des fonctions monotones
- ✏ Limite par encadrement
- ✏ Théorème des valeurs intermédiaires
- ✏ Théorème d'homéomorphisme

Fonctions convexes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

- ✏ Définition. Inégalité de Jensen
- ✏ Caractérisations : Inégalité des trois pentes, Epigraphe, croissance des pentes.
- ✏ Caractérisations pour des fonctions dérivables : croissance de f'.
- ✏ Inégalité arithmetico-géométrique

Etude locale au voisinage d'un point adhérent

- ✏ Limite en un point adhérent à A
- ✏ Propriétés, opérations sur les limites.
- ✏ Restrictions.
- ✏ Limites infinies ou en l'infini
- ✏ Continuité en un point

Exercices et questions de cours

1. **TOUS** Normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$: définition. Pour une d'entre elles, au choix de l'interrogateur, montrer que c'est une norme. Les comparer.
2. $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. **TOUS** Si A est une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E,N) et x un point de E, alors $d(x,A)=d(x,\overline{A})$.
4. **TOUS** Si A est une partie non vide bornée d'un espace vectoriel normé (E,N) alors $\overline{A}$ est bornée et $\mathrm{Diam}(A)=\mathrm{Diam}(\overline{A})$.
5. Si A est une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E,N) et x un point de E, alors $d(x,A)=0 \Longleftrightarrow x\in\overline{A}$.
6. En dimension finie, les compacts sont les parties fermées bornées.
7. En dimension finie, la convergence absolue d'une série entraine sa convergence.
8. **TOUS** Si U ouvert non vide de E, $vect(U)=E$
9. **TOUS** BANQUE CCP 35
   E et F désignent deux espaces vectoriels normés.
   (a) Soient f une application de E dans F et a un point de E.
   On considère les propositions suivantes :
   P1. f est continue en a.
   P2. Pour toute suite (x_n) d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=f(a)$.
   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
   (b) Soit A une partie dense d'un sous-espace vectoriel normé E, et soient f et g deux applications continues de E dans F, F désignant un espace vectoriel normé.
   Démontrer que si, pour tout $x\in A$, $f(x)=g(x)$, alors $f=g$.
10. BANQUE CCP 34
    Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.
    (a) Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
    (b) Démontrer que : $x\in\bar{A}\Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n\in\mathbb{N}, x_n\in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x$.
    (c) Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
    (d) Démontrer que, si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.
11. **TOUS** BANQUE CCP 44
    Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.
    (a) i. Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
    ii. Montrer que $A\subset B \Longrightarrow \overline{A}\subset\overline{B}$.
    (b) Montrer que $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
    Remarque : Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
    (c) i. Montrer que $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.
    ii. Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E=\mathbb{R}$).

Prochain programme : **Espaces vectoriels normés**

GROUPES DE COLLES
Groupe B : classés par ordre croissant des groupes de colles
DUPASQUIER (2) & FADAT & GUILLEN : (2) , AIT BRICK (4) , ROYNEAU (6) , GILLET (7) ?
CHAPUIS LE BERRE (8) & THIESSELIN (8) , GRENON (10) & GUYOMARD (10) , KERLAU (11)
Groupe A : les autres