

FONCTIONS DE $\mathbb{R}$ VERS $\mathbb{R}$

Exercice 1. L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les applications f , continues de $\mathbb{R}$ dans lui-même telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$

1°) Montrer que $f(0) = 0$ puis que f est impaire.

2°) Soit a un réel, montrer que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}, f(na) = nf(a).$

b) $\forall k \in \mathbb{Z}, f(ka) = kf(a).$

3°) Montrer que :

a) $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = rf(1).$

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xf(1).$

4°) Conclure : si f est solution du problème, alors $\exists k \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = kx$ et examiner la réciproque.

Exercice 2. En supposant connu le résultat de l'exercice précédent, déterminer toutes les applications f , continues de $\mathbb{R}$ dans lui-même telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

Exercice 3. Déterminer l'ensemble de définition de f , l'ensemble d'étude et les limites aux bornes de ce dernier lorsque :

a) $f : x \rightarrow (\ln(1 + e^{-x}))^{1/x}$

b) $f : x \rightarrow (\tan x)^{\tan(2x)}$

c) $f : x \rightarrow \sqrt{\ln(x^2 + 1)} - \sqrt{\ln(x^2 - 1)}$

Exercice 4. Etudier l'existence et donner éventuellement la valeur de :

a) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\sin x)^x - 1}{x^x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2 \cos(x)} - x \tan(x)$

Exercice 5. Soient a et b des réels non nuls, déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax) - \sin(ax)}{\tan(bx) - \sin(bx)}$

Exercice 6. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de $f : x \rightarrow \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$

Exercice 7. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x).$

1. Soit $x \in]0, 1[$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = x$ et $u_{n+1} = u_n^2$. Etudier $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$, puis montrer que f est constante sur $[0, 1[$.
2. Montrer de même que f est constante sur $[1, +\infty[$.
3. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$

Exercice 8. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue et strictement décroissante.

1°) Montrer que : $\forall n > 0, \exists ! a_n \in]0, 1[\mid f(a_n) = (a_n)^n$.

2°) Montrer que la suite (a_n) est monotone, en déduire qu'elle est convergente.

3°) Montrer que $\lim(a_n) = 1$.

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) \neq f(b)$. Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, montrer que :

$\exists c \in]a, b[\mid pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c).$

Exercice 10. Un marcheur parcourt 12 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel il parcourt 6 km.

Exercice 11. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application croissante. Montrer que f est continue si et seulement si $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

Exercice 12. Pour tout entier naturel n on pose $P_n = X^n - X - 1$.

1°) Montrer que pour tout $n \geq 2$, P_n a une unique racine dans l'intervalle $]1, 2[$. Celle-ci sera désormais notée a_n .

2°) Etudier successivement :

- La monotonie de (a_n) ;
- La convergence de (a_n) .
- La limite L de (a_n) .
- Un équivalent de $b_n = a_n - L$ que l'on notera c_n .
- Un développement limité à deux termes de b_n (autrement dit un équivalent de $b_n - c_n$).

Exercice 13. 1°) Montrer que la fonction sinus est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

2°) Montrer que $f : x \rightarrow \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14. Soit f une application périodique de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel normé (E, N) . Montrer que f a une limite en $+\infty$ si et seulement si f est une fonction constante.

FONCTIONS CONVEXES

Exercice 15. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, continue et strictement décroissante. Montrer que $f^{-1} : J = f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, continue et strictement décroissante.

Exercice 16. 1°) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que si $I = \mathbb{R}$, alors f est constante.

2°) Montrer que si $I \neq \mathbb{R}$ il existe des fonctions convexes et majorées sur I qui ne sont pas constantes.

Exercice 17. Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Quel résultat concernant la continuité de f obtient-on si on la suppose convexe sur un intervalle I ?

Exercice 18. Inégalité de Holder.

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ $2n$ réels strictement positifs. On veut montrer l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (*)$$

1. Montrer que pour a et b deux réels strictement positifs, on a : $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$

2. Montrer l'inégalité (*) dans le cas où $\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n b_i^q = 1$.

3. Conclure dans le cas général

On en déduit l'inégalité de Holder dans $\mathbb{R}^n$: $\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz en est un cas particulier pour $p = q = 2$

FONCTIONS CONTINUES ENTRE DEUX EVN

Exercice 19. Etude au voisinage de $(0, 0)$ d'une fonction de deux variables.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$. Pour savoir si f a une limite finie en $(0, 0)$, on peut se poser les questions suivantes :

- Les restrictions de f aux droites passant par l'origine ont-elles une limite finie ? Est-ce la même limite dans tous les cas ? (pour cela examiner la limite lorsque t tend vers 0 de $f(t, 0)$ (restriction à l'axe Ox), de $f(0, t)$ (restriction à l'axe Oy), de $f(t, kt)$ (restriction à la droite d'équation $y = kt$).
- Lorsque la première étude ne permet pas de conclure à la non-existence d'une limite, mais au contraire met en évidence une seule limite possible L , tenter de montrer que $|f(x, y) - L|$ tend vers 0, en utilisant un encadrement (penser aux coordonnées polaires).

Exemple : Pour chacune des fonctions f suivantes, examiner l'existence d'une limite en $(0, 0)$

$$\begin{array}{ll} 1^o) f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} & 2^o) f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \\ 3^o) f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & 4^o) f(x, y) = \frac{2x^2y^2}{x^2+y^4} \end{array}$$

Exercice 20. Soit f définie par $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

- 1°) Montrer que les restrictions de f aux droites passant par $(0, 0)$ ont toutes la même limite.
2°) Montrer que f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

Exercice 21. Soit $f : (x, y) \rightarrow \ln(y - x^2)$

- 1°) Montrer que l'ensemble de définition Ω de f est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
2°) Montrer que f est continue sur Ω .

Exercice 22. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^3 = 1\}$. Montrer que A est une partie fermée mais non compacte de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 23. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^4 = 1\}$. Montrer que A est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 24. Soit A une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé (E, N) et x un vecteur de E . Montrer l'existence de $a \in A$ tel que $d(x, A) = N(x - a)$.

Exercice 25. Soient A et B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé (E, N) .

- 1°) Montrer l'existence de $\delta(A, B) = \inf_{(a,b) \in A \times B} N(b - a)$
2°) Montrer que si A et B sont compacts, il existe $(\alpha, \beta) \in A \times B$ tels que $\delta(A, B) = N(\alpha - \beta)$. En déduire que dans ce cas, $\delta(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$.
3°) Donner, par exemple dans $\mathbb{R}^2$, un exemple de fermés A et B disjoints tels que $\delta(A, B) = 0$.

Exercice 26. E est un evn de dimension finie et supérieure ou égale à 2. Montrer que la sphère unité de E est connexe par arcs.

Exercice 27. Montrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ (on examinera la connexité par arcs de ces ensembles privés d'un de leurs points).

Exercice 28. Examiner la continuité de :

$$\begin{array}{l} 1^o) D_n = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right), \mathbb{R}_n[X] \text{ étant normé par la norme } N_\infty. \\ 2^o) D = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right), \mathbb{R}[X] \text{ étant normé par la norme } N_\infty \end{array}$$

Exercice 29. On se place dans $E = \mathcal{C}^o([0, 1], \mathbb{R})$. P est l'application qui à une fonction de E associe sa primitive nulle en 0. Examiner la continuité de l'endomorphisme P selon que E est muni de la norme de la convergence uniforme ou de la norme de la convergence en moyenne.

Exercice 30. On norme l'espace $\ell^\infty(\mathbb{R})$ des suites bornées de réels en posant : $N_\infty((u_n)) = \sup |u_n|$ et on désigne par C le sev des suites réelles convergentes. Montrer la continuité de :

$$\begin{array}{l} 1^o) D : \left(\begin{array}{ccc} \ell^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \ell^\infty(\mathbb{R}) \\ (u_n) & \longmapsto & (u_{n+1} - u_n) \end{array} \right) \\ 2^o) L : \left(\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n) & \longmapsto & \lim u_n \end{array} \right) \end{array}$$

Exercice 31. $E = \mathcal{C}^o([0, 1], \mathbb{R})$ est normé par la norme N_1 de la convergence en moyenne. $\forall a \in [0, 1], \forall f \in E$, on définit g en posant : $\forall x \in]0, 1], g(x) = \frac{1}{x^a} \int_0^x f(t)dt$ et $g(0) = 0$. Soit T_a défini par $T_a(f) = g$. Montrer que T_a est un endomorphisme continu de (E, N_1) .

Exercice 32. $E = \mathcal{C}^o([0, 1], \mathbb{R})$ est normé par la norme N_∞ de la convergence uniforme. On fixe une fonction a de $E \setminus \{0\}$ et pour toute fonction f de E , on pose $T(f) = \int_0^1 a(t)f(t)dt$. Montrer que T est une fonction continue.

Exercice 33. On norme $E = \mathbb{R}[X]$ avec la norme N_∞ .
Montrer que $B = \begin{pmatrix} E \times E & \longrightarrow & E \\ (P, Q) & \longmapsto & PQ \end{pmatrix}$ est bilinéaire et discontinue (On pourra utiliser $P_n = 1 + X + X^2 \dots + X^n$ et montrer que $N_\infty(P_n^2) \rightarrow \infty$).

Exercice 34. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = -\frac{1}{2}x^2$ si $x^2 + y^2 \leq 1$ et $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1$ si $x^2 + y^2 > 1$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 35. (E, N) est un espace vectoriel normé et $f : [a, +\infty[\rightarrow E$ une application continue. Montrer que si f a une limite finie en $+\infty$, alors f est uniformément continue.

Exercice 36. A est une partie bornée et non vide (et non réduit à un point) d'un espace vectoriel normé (E, N) . On note $\mathcal{L}(A, E)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de A dans E .

1°) Montrer que $\mathcal{L}(A, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(A, E)$.

2°) Pour $f \in \mathcal{L}(A, E)$, on note $K(f)$ l'ensemble des réels k pour lesquels f est k -lipschitzienne. Montrer que $K(f)$ a une borne inférieure, puis que celle-ci est un minimum, que l'on notera $c(f)$.

3°) Pour $a \in A$ et $f \in \mathcal{L}(A, E)$, on pose $N_a(f) = N(f(a)) + c(f)$. Montrer que N_a est une norme dans $\mathcal{L}(A, E)$ et que si $(a, b) \in A^2$, N_a et N_b sont équivalentes. Sont-elles équivalentes à la norme N_∞ ?

Exercice 37. $E = \mathbb{R}[X]$ est normé par $N_1 : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, $N_2 : P \rightarrow \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)|$ ou $N_3 : P \rightarrow \sup_{t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |P(t)|$. On note $d : P \rightarrow P'$ l'opérateur de dérivation.

1. Montrer que $d : (E, N_1) \rightarrow (E, N_1)$ n'est pas continue.
2. Que dire de $d : (E, N_2) \rightarrow (E, N_2)$?
3. Que dire de $d : (E, N_1) \rightarrow (E, N_3)$?
4. Qu'est-ce qui se passe si on change E par $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 38. Banque CCP MP

Soient E, F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F , alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

P1. f est continue sur E .

P2. f est continue en 0_E .

P3. $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$.

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.

On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)dt$.

Démontrer que φ est linéaire et continue.