TRIBUS

Exercice 1. $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont deux tribus sur un même ensemble Ω.

1. Montrer que $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ est une tribu. Généraliser à l'intersection d'une famille quelconque.
2. Donner un exemple où $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ n'est pas une tribu.

Exercice 2. Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{T} = \{A \subset \Omega \ / \ A \text{ ou } \bar{A} \text{ est fini ou dénombrable } \}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu. Quelle est cette tribu lorsque Ω est fini ou dénombrable ?
2. On suppose que Ω n'est ni fini, ni dénombrable. On définit P sur $\mathcal{T}$ en posant : $\forall A \in \mathcal{T},\ P(A) = 0$ si A est fini ou dénombrable et $P(A) = 1$ si $\bar{A}$ est fini ou dénombrable. Montrer que P est une probabilité.

PROBABILITÉS , PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Exercice 3. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante de réels qui converge vers 0. A quelle condition nécessaire et suffisante sur le réel λ existe-t'il une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(\{k \in \mathbb{N},\ k \geqslant n\}) = \lambda a_n$?

Exercice 4. Soit (x_n) une suite de réels telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 4x_{n+2} - 5x_{n+1} + x_n = 0$. A quelle condition sur x_0 et x_1 existe-t'il une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(\{n\}) = x_n$?

Exercice 5. Deux archers tirent sur une cible. Le premier qui tire a la probabilité p_1 d'atteindre sa cible, le second a la probabilité p_2. Les tirs s'arrêtent lorsqu'un archer atteint la cible.

1. Calculer la probabilité pour que le premier archer atteigne la cible.
2. Montrer qu'il est quasiment certain que la cible soit atteinte.
3. A quelle condition sur (p_1, p_2) le jeu est-il équitable ?

Exercice 6. Un sac A contient 4 boules noires et 2 blanches, un sac B contient 2 boules noires et 4 blanches.

1. On choisit de manière équiprobable un des deux sacs et on y tire une boule. Quelle est la probabilité que celle-ci soit noire ?
2. On choisit de manière équiprobable un des deux sacs et on y effectue trois tirages successifs indépendants avec remise. Quelle est la probabilité que la troisième boule tirée soit noire sachant que les deux premières l'étaient ?

Exercice 7. La probabilité qu'une famille ait exactement n enfants est $p_n = \dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$. En supposant les sexes équiprobables et l'indépendance des sexes au sein d'une famille, calculer la probabilité P_F qu'une famille ait au moins une fille. On estime que $\lambda = 2$, donner une estimation de P_F.

Exercice 8. Un sac contient 100 pièces : 80 sont vraies (V) : les deux faces sont équiprobables, 20 sont truquées (T) : la probabilité d'obtenir pile (P) est $\dfrac{3}{4}$, et donc celle d'obtenir face (F) est $\dfrac{1}{4}$.

1. On prend une pièce au hasard et on la lance. Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?
2. On prend une pièce au hasard, on la lance et on obtient pile. Quelle est la probabilité que cette pièce soit truquée ?

Exercice 9. Une urne contient 1 boule blanche et 1 boule rouge. On effectue une suite de tirages consistant à : tirer une boule et la remettre accompagnée de deux boules de sa couleur.

1. Quelle est la probabilité pour que les n premières boules tirées soient toutes rouges ?
2. Quelle est la probabilité pour que l'on tire indéfiniment des boules rouges ?
3. Comment sont modifiés les résultats précédents si au départ on a b boules blanches et r boules rouges et qu'à chaque remise on ajoute à la boules tirée c boules de sa couleur ?

Exercice 10. On effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n la probabilité d'avoir obtenu pour la première fois deux piles consécutifs lors du n^o lancer.

1. Calculer a_1, a_2 et a_3.
2. Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ \ a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + p(1-p)a_n$. En déduire a_n en fonction de n.

3. Montrer que l'événement : "on obtient deux piles consécutifs" est quasi-certain par deux méthodes : l'une utilisant la valeur de a_n, l'autre utilisant seulement la relation de récurrence.

Exercice 11. L'hémophilie est une maladie transmise par la mère. Dans une certaine dynastie, la reine porte le gène de l'hémophilie avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. Si elle est porteuse, chaque prince aura une chance sur deux de souffrir de cette maladie. La reine a eu 3 fils non hémophiles.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit porteuse du gène ?
2. S'il nait un quatrième prince, avec quelle probabilité sera-t-il hémophile ?

Exercice 12. Un enfant saute d'un sommet à un autre d'un triangle de sommets A, B et C tracé à la craie sur le sol (un saut vertical est admis). Il joue de la manière suivante :

☞ S'il est au sommet A ou au sommet B, il sautera vers le sommet A, B ou C avec la même probabilité.

☞ S'il est au sommet C, il saute toujours vers le sommet A.

Avant le premier saut, l'enfant se trouve A avec une probabilité a_0, en B avec une probabilité b_0 et en C avec une probabilité c_0. Après le n^e saut, l'enfant se trouve en A avec une probabilité a_n, en B avec une probabilité b_n et en C avec une probabilité c_n.
Donner une expression de chacune des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 13. Lors d'une interrogation, un étudiant se trouve face à une question pour laquelle m réponses possibles sont proposées et une seule est correcte. Soit l'étudiant connaît la réponse, soit il choisit au hasard une réponse parmi les m réponses proposées. La probabilité que l'étudiant connaisse la réponse à la question posée est p avec $p \in]0,1[$. Sachant que l'étudiant a répondu correctement à la question posée, quelle est la probabilité qu'il y ait répondu en connaissant la bonne réponse ?

Exercice 14. On effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée et on note p_n la probabilité de ne pas avoir obtenu trois piles consécutifs au cours de n premiers lancers.

1. Calculer p_1, p_2, p_3 et p_4.
2. Exprimer p_{n+3} en fonction de p_{n+2}, p_{n+1} et p_n.
3. Montrer que (p_n) converge et calculer sa limite. Comment peut-on interpréter cette limite ?

Exercice 15. $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé.

1. Montrer que si A et B sont deux événements indépendants, il en est de même pour A et $\bar{B}$, puis pour $\bar{A}$ et $\bar{B}$ ainsi que pour $\bar{A}$ et B.
2. Soit $n \geqslant 2$ et $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants.
   (a) Montrer que : $\forall i \in [[1,n]]$, $A_1, \dots, A_{i-1}, \bar{A}_i, A_{i+1}, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants.
   (b) On note $A^1 = A$ et $A^{-1} = \bar{A}$. Montrer que : $\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, $A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_n^{\varepsilon_n}$ sont mutuellement indépendants.

Exercice 16. Soit $s > 1$ et $\lambda > 0$. On pose $P(\{n\}) = \dfrac{\lambda}{n^s}$ pour tout entier $n > 0$.

1. A quelle condition P est-elle une probabilité. On suppose cela réalisé par la suite.
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $A_p = \{n \in \mathbb{N}^* \ / \ p|n\}$. Calculer $P(A_p)$.
3. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que $(A_p)_{p\in\mathscr{P}}$ est une suite d' événements mutuellement indépendants. On admet qu'il en est de même pour la suite $(\bar{A}_p)_{p\in\mathscr{P}}$.
4. En considérant $P(\{1\})$, montrer que $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right)\left(\displaystyle\prod_{p\in\mathscr{P}} (1-p^{-s})\right) = 1$.

Exercice 17. Banque CCP MP
Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance. Mêmes questions pour Y.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   Déterminer la loi de X puis en déduire la loi de Y.

Exercice 18. Banque CCP MP
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans reise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire telle que $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n,p)$ ou $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

1. On définit une nouvelle variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{1+X}$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$
2. On suppose $p = \dfrac{1}{2}$ et soit $a > 0$. Calculer l'espérance de $Z = \dfrac{a^X}{2n}$

Exercice 20. Marche aléatoire sur une droite
Soit $p \in]0,1[$. Une puce se déplace alátoirement sur une droite d'origine O. A chaque instant, elle fait un bond d'une unité vers la droite (avec une probabilité p) ou vers la gauche (avec une probabilité $q = 1 - p$). A l'instant initial, la puce est à l'origine. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n l'abscisse de la puce à l'instant n.
Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.

Exercice 21. Utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev
On effectue une suite de lancers d'un dé à six faces. De combien de lancers suffit-il pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 est comprise entre $\dfrac{1}{6} - 0,01$ et $\dfrac{1}{6} + 0,01$?

COUPLE DE VARIABLES ALÉATOIRES

Exercice 22. Soit $a > 0$, et soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que : $\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathbb{P}\left((X = i) \bigcap (Y = j)\right.$
$\dfrac{a}{2^{i+j}}$.

1. Calculer a, puis déterminer les lois marginales du couple (X, Y).
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 23. Banque CCP MP
Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathbb{P}\left((X = i) \bigcap (Y = j)\right) = \dfrac{1}{e\, 2^{i+1}\, j!}$.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$
   (b) Déterminer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$
3. les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$

Exercice 24. Maximum et minimum de deux variables aléatoires
Soit un entier $n \geqslant 2$. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $S = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de S. (ind : commencer par déterminer pour $k \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}(S \leqslant k)$). Puis calculer $\mathbb{E}(S)$.
2. Déterminer (presque sans calcul) l'espérance de T, puis l'espérance de la variable aléatoire ST
3. Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 25. Etude d'un couple de variables aléatoires (suite de l'exercice 24)
Soit un entier $n \geqslant 2$. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $S = \max(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (S, X).
2. Déterminer la loi de S. (déjà déterminée dans l'exercice 24 précédent).
3. Déterminer les lois conditionnelles de chacune de ces variables aléatoires X et S, sachant l'autre.
4. Calculer la covariance de S et X. *Indication : on utilisera le résultat obtenu pour $\mathbb{E}(S)$ dans l'exercice 24 précédent et la relation* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 26. Banque CCP 100

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.

2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall\, a \in]0, +\infty[,\ P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application** :
   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. Á partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : Considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\texttt{ieme}}$ tirage.

Exercice 27. Banque CCP 102

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A,B et C.
A l'instant t=0, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement" l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note B_n l'événement" l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note C_n l'événement" l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier, sans calculs, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : Aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

LOIS USUELLES

Exercice 28. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.
2. Calculer la probabilité que X prenne une valeur paire.

Exercice 29. Maximum de deux lois géométriques
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois géométriques respectives $\mathscr{G}(p)$ et $\mathscr{G}(q)$. On note $Z = \max(X, Y)$. Calculer $\mathbb{E}(Z)$. *(on commencera par calculer $\mathbb{P}(Z > n)$...)*

Exercice 30. Banque CCP MP
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. *Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes*

1. (a) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $\forall m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p). Déterminer la loi de X.

Exercice 31. Naissances de filles et de gaçons
On souhaite modéliser la situation suivante : dans une famille, le nombre N d'enfants suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. À chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille est p, et la probabilité qu'il soit un garçon est $q = 1 - p$. On note X le nombre de filles et Y le nombre de garçons.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (N, X). En déduire la loi de X, et celle de Y.
2. Quel est le nombre moyen d'enfants par famille ? le nombre moyen de filles ? le nombre moyen de garçons ?
3. Montrer que les variables X et Y sont indépendantes

Exercice 32. Probabilités et matrices binaires 2×2
On note $\mathscr{M}_2(\{0,1\})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels M telles que $M_{i,j} \in \{0,1\}$ pour tout $i, j \in \{1,2\}$.

1. Combien y a-t-il de matrices $M \in \mathscr{M}_2(\{0,1\})$? parmi celles-ci, combien sont inversibles ? combien sont diagonalisables dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?
2. Soient $B_{1,1}$, $B_{1,2}$, $B_{2,1}$ et $B_{2,2}$ des variables aléatoires indépendantes, suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On définit $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$ et $R = rg(B)$
   Déterminer la loi de la variable aléatoire R. Calculer son espérance.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de p , la probabilité que B soit inversible est-elle maximale ?
4. Pour quelle(s) valeur(s) de p , la probabilité que B soit diagonalisable est-elle maximale ?

FONCTIONS GÉNÉRATRICES

Exercice 33. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = a \exp\left(1 + t^2\right)$, où $a > 0$ est un réel à déteriner.
Déterminer a, puis la loi de X et enfin calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$

Exercice 34. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = \dfrac{1 + a^n}{4n!}$.

1. Déterminer a. Puis, montrer l'existence et calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ en fonction de a.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$
3. Calculer la fonction génératrice G_X de X. Retrouver ainsi $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 35. Une application surprenante des fonctions génératrices

1. Soit le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} t^k$.
   Montrer que P ne peut pas s'écrire $P = QR$ avec $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieurs ou égaux à 5.
2. Montrer que, quelle que soit la façon dont on pipe deux dés, la somme obtenue lors d'un lancer de ces deux dés ne pourra pas suivre une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$

Exercice 36. Banque CCP 111

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.

   (a) Prouver que $R \geqslant 1$.
   On pose alors $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.

   Pour tout réel t fixé, exprimer G_X sous forme d'une espérance.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, $\forall\, t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

(b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X+Y$.

EXERCICES PLUS THÉORIQUES

Exercice 37. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, admettant un moment d'ordre 2. Montrer que $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\mathbb{P}(X>n)$ *(Ind : $2n+1=(n+1)^2-n^2$...)*

Exercice 38. Soit $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'évènements de $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. On note $A^* = \bigcap_{N=0}^{+\infty}\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n$.

1. Montrer que A^* appartient à $\mathcal{A}$.

   Montrer que si la suite $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion, alors $A^* = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

   Montrer que si la suite $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion, alors $A^* = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$.

   Interpréter A^*.
2. *Lemme de Borel-Cantelli* : soit $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'évènements. Montrer que :
   (a) si $\sum \mathbb{P}\left(A_n\right)$ converge, alors $\mathbb{P}\left(A^*\right)=0$
   (b) si les $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants et que $\sum \mathbb{P}\left(A_n\right)$ diverge, alors $\mathbb{P}\left(A^*\right)=1$

   Indication pour le 2b : on pourra commencer par calculer pour $N \geqslant n$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N}\overline{A_k}\right)$
3. Un singe (immortel) dispose d'une machine à écrire et de papier sans restriction. On suppose que les pressions du singe sur les touches sont ind{ependantes et que toutes les touches ont une probabilité non nulle d'être pressées. Montrer qu'il écrira non seulement une fois, mais même une infinité de fois les oeuvres complètes de Shakespeare.

Exercice 39. Soit $\left(X_i\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli, deux à deux indépendantes, de paramètres respectifs $\left(p_i\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$. Démontrer que pour tout $\varepsilon>0$, $\lim_{n\mapsto+\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n}\right|\leqslant\varepsilon\right)=1$.

Exercice 40. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

1. Déterminer, pour tout $u\in\mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{uX}\right)$
2. Soit $u\in\mathbb{R}_+^*$ et $x\in]0,1[$. Montrer que $\mathbb{P}\left(X\geqslant(1+x)\lambda\right)\leqslant e^{-(u(1+x)+1-e^u)\lambda}$.
3. soit $x\in]0,1[$. Soit $\varphi_x : u\mapsto u(1+x)+1-e^u$. Montrer que φ_x est majorée sur $\mathbb{R}^+$ et que $\sup_{u\in\mathbb{R}^+}\varphi_x(u)=h(x)$ où $h(x)=(1+x)\ln(1+x)-x$. En déduire que $\mathbb{P}(X\geqslant(1+x)\lambda)\leqslant e^{-\lambda h(x)}$
4. Soit $x\in]0,1[$. Montrer que pour tout $u<0$, $\mathbb{P}\left(X\leqslant(1-x)\lambda\right)\leqslant e^{-(u(1-x)+1-e^u)\lambda}$,
   puis que $\mathbb{P}(X\leqslant(1-x)\lambda)\leqslant e^{-\lambda h(-x)}$.
5. En déduire que, pour tout $x\in]0,1[$, $\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}(X)|>\lambda x\right)\leqslant 2\max\left(e^{-\lambda h(x)},e^{-\lambda h(-x)}\right)$.

Exercice 41. $(\Omega,\mathcal{T},P)$ est un espace probabilisé.

1. Montrer que si A et B sont deux événements indépendants, il en est de même pour A et $\bar{B}$, puis pour $\bar{A}$ et $\bar{B}$ ainsi que pour $\bar{A}$ et B.
2. Soit $n\geqslant 2$ et $A_1,\ldots,A_n$ des événements mutuellement indépendants.
   (a) Montrer que : $\forall i\in[[1,n]]$, $A_1,\ldots,A_{i-1},\bar{A}_i,A_{i+1},\ldots,A_n$ sont mutuellement indépendants.
   (b) On note $A^1=A$ et $A^{-1}=\bar{A}$. Montrer que : $\forall(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n$, $A_1^{\varepsilon_1},\ldots,A_n^{\varepsilon_n}$ sont mutuellement indépendants.