

DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 04 FACULTATIF

PROBLEME : Matrices compagnons

PARTIE I : Matrices compagnon.

Si P est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, unitaire et de degré $d \geq 2$ s'écrivant :

$$P = X^d - a_{d-1}X^{d-1} - a_{d-2}X^{d-2} - \dots - a_1X - a_0$$

, la matrice compagnon du polynôme P est la matrice :

$$A_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 & a_{d-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{d-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$$

1. Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.

1.a) Soit $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes. Pour $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, et $z \in \mathbb{C}$, on note $D_q(z)$ le déterminant de taille q :

$$D_q(z) = \begin{vmatrix} z & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & z & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & z & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & -1 & z & \alpha_{q-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \alpha_{q-1} \end{vmatrix}$$

Pour $q \geq 3$, exprimer $D_q(z)$ en fonction de $D_{q-1}(z)$. En déduire la valeur de $D_q(z)$.

1.b) Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice A_P est le polynôme P .

2. Etude de la diagonalisation de A_P .

2.a) Montrer que pour tout complexe μ , on a : $\text{rg}(A_P - \mu I_d) \geq d - 1$.

2.b) Déterminer le rang de $A_P - \mu I_d$ selon que μ est ou n'est pas valeur propre de A_P .

2.c) En déduire que la matrice A_P est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples.

2.d) Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et sa transposée $B = {}^t A$ ont le même polynôme caractéristique et que A diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

En déduire que $B_P = {}^t A_P$ est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples.

2.e) Si μ est valeur propre de B_P , montrer que $E_\mu(B_P)$ est une droite vectorielle et déterminer le vecteur de base de cette droite dont la première composante vaut 1.

2.f) Lorsque B_P est diagonalisable, déterminer une matrice Q diagonalisante pour B_P .

3. Exemple d'utilisation des matrices compagnon.

On cherche à déterminer les suites complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, données par leurs trois premiers termes u_0, u_1, u_2 , et la relation de récurrence : $\mathcal{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = -u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note C_n la matrice colonne $C_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

3.a) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = AC_n$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = A^n C_0$.

- 3.b)** Montrer que A est une matrice diagonalisable et déterminer une matrice inversible Q telle que $D = Q^{-1}AQ$ soit diagonale.
- 3.c)** Établir l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a(-2)^n + b(-1)^n + c2^n$
- 3.d)** Exemple : Déterminer u_n lorsque $u_0 = 1, u_1 = 3$ et $u_2 = 1$.

PARTIE II : Le théorème de Cayley-Hamilton

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n , $f \in \mathcal{L}(E)$ et χ_f le polynôme caractéristique de f .

L'objectif est de prouver que l'endomorphisme $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul c'est-à-dire : $\forall x \in E, (\chi_f(f))(x) = 0_E$.

Cette égalité étant claire pour $x = 0_E$, nous allons la montrer pour x un vecteur non nul de E .

- 1.** Un sous-espace de E stable par f
 - 1.a)** Montrer que l'ensemble des entiers k pour lesquels le système $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^k(x))$ est libre, admet un maximum p . Montrer l'existence de $(a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ tel que : $f^{p+1}(x) = a_0x + a_1f(x) + \dots + a_pf^p(x)$.
 - 1.b)** Montrer que $E_x = \text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^p(x))$ est un sous-espace de E stable par f et que $\mathcal{B}_x = (x, f(x), f^2(x), \dots, f^p(x))$ en est une base.
- 2.** L'endomorphisme induit par f sur ce sous-espace.
 - 2.a)** Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}_x = (x, f(x), f^2(x), \dots, f^p(x))$ de l'endomorphisme u induit par f sur E_x en fonction des a_i .
 - 2.b)** Exprimer le polynôme caractéristique de u en fonction des a_i . Vérifier que $(\chi_u(f))(x) = 0_E$
- 3.** Conclusion.
 - 3.a)** Justifier l'existence d'un polynôme S tel que $\chi_f = S \times \chi_u$.
 - 3.b)** Conclure en montrant que $(\chi_f(f))(x) = 0_E$