Devoir en temps libre n° 07

Ce devoir est constitué d'un seul petit probleme.

Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaitre clairement sur la première page le nombre de copies.

PROBLEME : Fonction continue nulle part dérivable

PARTIE A : Création de la fonction

On définit par récurrence la suite (f_n) de fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ par : $f_0(x) = x$ et, pour tout n entier naturel, on suppose que f_{n+1} est affine sur les intervalles $\left[\dfrac{k}{3^{n+1}}, \dfrac{k+1}{3^{n+1}}\right]$, avec k variant de 0 à $3^{n+1}-1$ et qu'elle vérifie les relations suivantes :

$$f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right),\ f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}+\frac{2}{3^{n+1}}\right),\ f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}+\frac{2}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}\right) \text{ et } f_{n+1}(1) = 1.$$

1. Tracer sur une même figure les graphes de f_0, f_1, f_2, f_3 (unité 18 cm conseillée).

2. On suppose f_n connue ;
on donne les coordonnées $x_n = \dfrac{k}{3^n}$, $y_n = \dfrac{k+1}{3^n}$, $x'_n = f_n\left(\dfrac{k}{3^n}\right)$, $y'_n = f_n\left(\dfrac{k+1}{3^n}\right)$.
Représenter graphiquement f_{n+1} dans l'intervalle $[x_n, y_n]$ et démontrer successivement que :

2.a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$.

2.b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, tout x de $[x_n, y_n]$ et tout entier $m \geqslant n$, on a $f_m(x) \in [x'_n, y'_n]$.

2.c) Établir enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|x'_n - y'_n| \leqslant (2/3)^n$.

3. Soit x un réel de $[0,1[$.
Démontrer qu'il existe une suite d'entiers $n \mapsto k_n$ de $\mathbb{N}$ unique telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{k_n}{3^n} \leqslant x < \frac{k_n+1}{3^n}.$$

On pose alors : $x_n = \dfrac{k_n}{3^n}$, $y_n = \dfrac{k_n+1}{3^n}$, $x'_n = f_n(x_n)$, $y'_n = f_n(y_n)$ et si $x'_n \leqslant y'_n$, $x''_n = x'_n$, $y''_n = y'_n$, enfin si $x'_n > y'_n$, $x''_n = y'_n$, $y''_n = x'_n$.
Démontrer que les suites (x''_n) et (y''_n) sont adjacentes et convergentes.
On note $\varphi(x)$ leur limite commune et l'on pose $\varphi(1) = 1$.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], |f_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
Écrire un programme Python (et utilisant matplotlib) permettant de tracer φ avec une précision $1/50$ (on cherchera le plus petit n tel que le graphe de f_n sera suffisamment proche de celui de φ)

PARTIE B : Régularité de la fonction

5. Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur $[0,1]$.
En déduire que φ est continue sur le segment $[0,1]$.

6. Soit g une fonction réelle définie au voisinage du point a de $\mathbb{R}$. Montrer que :
g est dérivable en a, de nombre dérivé ℓ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout couple $(h,k) \in \mathbb{R}_+^2$, vérifiant $0 < h+k < \alpha$, on a l'inégalité :

$$\left|\frac{g(a+h) - g(a-k)}{h+k} - \ell\right| < \varepsilon.$$

7. Soit $0 < x < 1$ un réel.
On reprend les notations A.3. et l'on pose pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $D_n = 3^n(y'_n - x'_n)$.
Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $D_{n+1} = 2D_n$ ou $D_{n+1} = -D_n$.

8. En déduire que D_n n'admet pas de limite finie quand n tend vers l'infini.
Établir que la fonction φ n'est dérivable en aucun point de $[0, 1]$.

PARTIE C : Densité de l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivable

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ nulle part dérivable.

9. Montrer que $\mathcal{M}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

10. La somme de deux éléments de $\mathcal{M}$ est-elle toujours dans $\mathcal{M}$?
La somme de deux éléments de $\mathcal{M}$ n'est-elle jamais dans $\mathcal{M}$?

11. Montrer que, pour la norme de convergence uniforme, l'intérieur de $\mathcal{M}$ est vide.

12. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{M}$ et $f \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, il existe une suite de fonctions continues dérivables sur $[0, 1]$ qui converge uniformément vers $f - \varphi$.

13. En déduire que $\mathcal{M}$ est dense dans $\left(\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \| \ \|_\infty\right)$