Programme de Colle - Semaine n° 14

Du 16 janvier 2023 au 20 janvier 2023

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él ‘eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"B"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B**
Pour compléter la question de cours, on pourra demander l'énoncé précis d'un résultat ou d'une définition, y compris lorsqu'il ne s'agit pas d'une question du groupe correspondant.

Suites et séries de fonctions

- ✏ Convergences, continuité, dérivabilité, intégration de la limite ou la somme
- ✏ Approximation d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier, par des polynomes

Intégration et dérivation

Rappels

Primitives et intégrales

- ✏ Primitives d'une fonction continue ; Théorème fondamental
- ✏ Intégration par parties ; Changement de variables ; Théorèmes de Taylor

Séries entières

- ✏ Définition
- ✏ Lemme d'Abel, rayon de convergence.
- ✏ Opérations algèbriques sur les séries entières : somme, produit de Cauchy.
- ✏ Mode de convergence des séries entières
- ✏ Dérivée et primitive d'une somme de séries entières
- ✏ Fonctions développables en série entière, unicité si existence.
- ✏ Développements en séries entières usuels

Exercices et questions de cours

1. **TOUS** Lemme de Lebesgue. Montrer que pour $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\,\sin(nt)\,dt = 0$
2. **TOUS** Domaine de définition, continuité, limite aux bornes de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n}$
3. Théorème de Taylor avec reste intégral
4. **TOUS** Pour $x \in [-1,1]$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n(n-1)}$. Calculer $f(x)$ pour $x \in]-1,1[$ de deux façons : à l'aide d'une DES et en calculant $f'(x)$
5. Lemme d'Abel
6. **Groupe B** Règle de d'Alembert pour l'estimation du rayon de convergence d'une série entière
7. Caractérisations du rayon de convergence d'une série entière
8. Mode de convergence d'une série entière
9. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $a_0 = a_1 = 1 = -a_2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$. Domaine de définition et expression de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
10. **Groupe B** DSE (et rayon de convergence) des fonctions usuelles : exp, cos, sin, $x \to \dfrac{1}{1-x}$, $x \to \ln(1-x)$, arctan, $(1+x)^\alpha$...
11. Obtention des DSE des fonctions usuelles : exp, cos, sin, $x \to \dfrac{1}{1-x}$, $x \to \ln(1-x)$, arctan, $(1+x)^\alpha$...

12. **Banque CCP : Ex 8** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
    (a) i. Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.
    ii. Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
    (b) i. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
    ii. Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

13. **<u>TOUS</u> Banque CCP : Ex 14**
    (a) Soit a et b deux réels donnés avec $a<b$.
    Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
    Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
    (b) Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
    (c) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

14. **Banque CCP : Ex 10**
    On pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.
    (a) Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
    (b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

15. **Banque CCP : Ex 27**
    Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
    (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
    (b) Soit $a\in\,]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?
    (c) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
    (d) Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

16. **Banque CCP : Ex 2**
    On pose $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2(3-x)}$.
    (a) Décomposer $f(x)$ en éléments simples et en déduire la primitive G de f définie sur l'intervalle $]-1;3[$ telle que $G(1)=0$.
    (b) Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction f et précisez le rayon de convergence.
    (c) Déduire de ce développement la valeur de $G^{(3)}(0)$.

17. **TOUS Banque CCP : Ex 22**
    (a) Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
    (b) Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon, la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

    La série obtenue converge-t-elle pour $x=\dfrac{1}{4}$? $x=\dfrac{1}{2}$? $x=-\dfrac{1}{2}$?.

18. **Banque CCP : Ex 51**
    (a) Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

    On se propose de calculer la somme de cette série.

    (b) Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
    Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
    (c) En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.
    (d) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

Prochains programmes : **Intégrales généralisées**

GROUPES DE COLLES
Groupe B : classés par ordre croissant des groupes de colles
HAMON (2) & HATON (2) , DEMOL (4) & VULIN (4) , GAUTHERET A. (6) & GUILLARD (6) & LE BRIS (6) , DESEINE (8) & NIVET (8)
GUITTONNY (10) & PELLETIER (10) & RICARD (10) , BESSEDE (11) DURAND (12) & GODEREAUX (12) WEBER (13)
Groupe A : les autres