ENSEMBLES DENOMBRABLES

Exercice 1. Soit f l'application : $f : \begin{pmatrix} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (p,q) & \longmapsto & q + \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} \end{pmatrix}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement croissante qui diverge vers $+\infty$. En déduire que : $\forall a \in \mathbb{N}, \exists! n \in \mathbb{N} \big| \, u_n \leqslant a < u_{n+1}$.
2. Montrer (Par exemple par analyse-synthèse) que f est une bijection. Quel résultat en déduit-on pour l'ensemble $\mathbb{N}^2$?

Exercice 2. Soit P un ensemble non vide.

1. On suppose qu'il existe une injection f de P dans $\mathbb{N}$. Montrer que P est fini ou dénombrable.
2. On suppose qu'il existe une surjection g de $\mathbb{N}$ dans P. Montrer que P est fini ou dénombrable.

TRIBUS

Exercice 3. Soit Ω un ensemble infini non dénombrable

1. Soit $\mathcal{T} = \big\{A \subset \Omega\,;\, A \text{ ou } \overline{A} \text{ est au plus dénombrable}\big\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω.
   (b) Montrer que la fonction $\mathbb{P} : \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}$ définie par :
   $$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est au plus dénombrable} \\ 1 & \text{si } \overline{A} \text{ est au plus dénombrable} \end{cases}$$
   définie une probabilité. (on commencera par vérifier que $\mathcal{P}$ est correctement définie.)
2. Démontrer que $\mathcal{U} = \big\{A \subset \Omega\,;\, A \text{ ou } \overline{A} \text{ est fini}\big\}$ n'est pas une tribu sur Ω.

PROBABILITÉS , PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Exercice 4. Dans un jeu de 52 cartes, 5 sont distribuées à un joueur.

1. Quelle est la probabilité que ce joueur ait en main exactement une paire, c'est-à-dire deux cartes de la même valeur (les 3 autres cartes étant de valeurs distinctes entre elles et de valeurs différentes de celle de la paire)
2. Quelle est la probabilité que ce joueur ait en main exactement trois cartes de carreau ?

Exercice 5. Un couple a deux enfants, garçons ou filles. Les 4 configurations sont équiprobables. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles.

1. sans aucune information,
2. sachant que l'ainé est une fille,
3. sachant que l'un des enfants est une fille.

Exercice 6. L'hémophilie est une maladie transmise par la mère. Dans une certaine dynastie, la reine porte le gène de l'hémophilie avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$. Si elle est porteuse, chaque prince aura une chance sur deux de souffrir de cette maladie. La reine a eu 3 fils non hémophiles.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit porteuse du gène ?
2. S'il nait un quatrième prince, avec quelle probabilité sera-t-il hémophile ?

Exercice 7. Un enfant saute d'un sommet à un autre d'un triangle de sommets A, B et C tracé à la craie sur le sol (un saut vertical est admis). Il joue de la manière suivante :

- ☞ S'il est au sommet A ou au sommet B, il sautera vers le sommet A, B ou C avec la même probabilité.
- ☞ S'il est au sommet C, il saute toujours vers le sommet A.

Avant le premier saut, l'enfant se trouve A avec une probabilité a_0, en B avec une probabilité b_0 et en C avec une probabilité c_0. Après le n^e saut, l'enfant se trouve en A avec une probabilité a_n, en B avec une probabilité b_n et en C avec une probabilité c_n.

Donner une expression de chacune des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8. Un fumeur essaye de s'arrêter de fumer. S'il ne fume pas un jour donné, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $p \in]0,1[$. S'il fume un jour donné, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $q \in]0,1[$. On suppose que p et q vérifient $0 < p - q < 1$.

1. Calculer la probabilité p_n que cette personne ne fume pas le n^e jour.
2. Étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$

Exercice 9. Lors d'une interrogation, un étudiant se trouve face à une question pour laquelle m réponses possibles sont proposées et une seule est correcte. Soit l'étudiant connaît la réponse, soit il choisit au hasard une réponse parmi les m réponses proposées. La probabilité que l'étudiant connaisse la réponse à la question posée est p avec $p \in]0,1[$. Sachant que l'étudiant a répondu correctement à la question posée, quelle est la probabilité qu'il y ait répondu en connaissant la bonne réponse ?

Exercice 10. Dans une usine, deux ateliers A et B fabriquent des composants pour les téléphones portables. Ces composants arrivent ensuite dans l'atelier d'assemblage. Après une étude statistique, il a été constaté que 5% des composants de l'atelier A étaient défectueux, contre 1% de l'atelier B. Mais 75% des composants arrivant à l'atelier d'assemblage proviennent de l'atelier A. Ensuite, si le composant est parfait en arrivant à l'atelier d'assemblage, il peut être détérioré avec une probabilité de $\dfrac{1}{48}$ lors de l'assemblage. Après l'assemblage, un téléphone portable est tiré au hasard et <u>il ne fonctionne pas</u>.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait été détérioré lors de l'assemblage ?
2. Quelle est la probabilité qu'il soit sorti défectueux de l'atelier A ? de l'atelier B ?

Exercice 11. Loi de Zipf Soit $a \in]1,+\infty[$. On définit le réel $\zeta(a)$ par $\zeta(a) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$.

1. Démontrer que l'on définit une probabilité $\mathbb{P}_a$ sur $\mathbb{N}^*$ à l'aide des réels : $q_k = \dfrac{1}{k^a \zeta(a)}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ *(Loi de Zipf)*
   On considère désormais l'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*), \mathbb{P}_a)$.
2. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $m\mathbb{N}^* = \{km;\, k \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer $\mathbb{P}_a(m\mathbb{N}^*)$.
   Pour la suite, on note $A_m = m\mathbb{N}^*$.
3. Donner une CNS sur les entiers i et j pour que les évènements A_i et A_j soient indépendants.
4. *Application* : On note p_i le $i-$ième nombre premier ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ...) et C_n l'ensemble des entiers dans $\mathbb{N}^*$ qui ne sont divisibles par aucun des nombres premiers p_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}_a(C_n)$.
   (b) Déterminer $\displaystyle\bigcap_{n \geqslant 1} C_n$.
   (c) En déduire le développement eulérien de la fonction ζ : $\forall a > 1,\ \zeta(a) = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^a}\right)^{-1}$.

Exercice 12. Des études sur une population ont montré que l'on pouvait admettre que la probabilité p_n qu'une famille ait exactement n enfants est définie par : $\forall n \geqslant 1,\ p_n = \alpha p^n$ avec $p \in]0,1[, \alpha > 0$, et $(1+\alpha)p < 1$. On suppose que les naissances des garçons et des filles sont équiprobables.

1. *Question préliminaire :* montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x| < 1$, on a :
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{n} x^k = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$.
2. Calculer la probabilité pour une famille de ne pas avoir d'enfants ?
3. Calculer la probabilité pour une famille d'avoir exactement k garçons ?
4. Étant donnée une famille ayant au moins un garçon, quelle est la probabilité qu'elle en ait deux ou plus ?

Exercice 13. Banque CCP MP
Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance. Mêmes questions pour Y.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   Déterminer la loi de X puis en déduire la loi de Y.

Exercice 14. Banque CCP MP
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 15. On considère 6 dés cubiques, dont 5 sont équilibrés. Le dernier dé est pipé de sorte que lorsqu'on lance ce dé, chacun des chiffres apparaît avec une probabilité proportionnelle à ce chiffre.

1. On note X la variable aléatoire égale au chiffre donné par le dé truqué que l'on lance. Déterminer la loi de X, calculer son espérance et sa variance.
2. On effectue n tirages successifs et indépendants d'un dé parmi les six. Soit N la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'on obtient le dé truqué.
   Déterminer la loi de N. Combien de tirages doit-on effectuer pour que la probabilité d'avoir obtenu le dé truqué parmi ceux tirés soit au moins de $\frac{1}{2}$?
3. On effectue n tirages successifs sans remise d'un dé parmi les six. Soit M la variable aléatoire représentant le nombre de fois oùl'on obtient le dé truqué.
   Déterminer la loi de M. Combien de tirages doit-on effectuer pour que la probabilité d'avoir obtenu le dé truqué parmi ceux tirés soit au moins de $\frac{1}{2}$?

Exercice 16. Un rat de laboratoire est soumis à l'expérience suivante : il est enfermé dans une cage comportant quatre portes derrière chacune desquelles se trouve un beau morceau de gruyère. Trois des quatre portes sont munies d'un dispositif envoyant à l'animal une décharge électrique s'il essaie de les franchir. La quatrième laisse le passage libre.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués par le rat jusqu'à ce qu'il trouve la bonne porte.
Déterminer la loi de X et son espérance dans chacun des cas suivants :

1. Le rat n'a aucune mémoire : il recommence ses tentatives sans tenir compte des échecs passés.
2. Le rat a une mémoire immédiate : il ne tient compte que de l'échec qui prcède sa nouvelle tentative
3. Le rat a une bonne mémoire : il élimine les portes où il a échoué.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire telle que $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n,p)$ ou $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

1. On définit une nouvelle variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{1+X}$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$
2. On suppose $p = \dfrac{1}{2}$ et soit $a > 0$. Calculer l'espérance de $Z = \dfrac{a^X}{2n}$

Exercice 18. Marche aléatoire sur une droite
Soit $p \in]0,1[$. Une puce se déplace alátoirement sur une droite d'origine O. A chaque instant, elle fait un bond d'une unité vers la droite (avec une probabilité p) ou vers la gauche (avec une probabilité $q = 1-p$). A l'instant initial, la puce est à l'origine. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n l'abscisse de la puce à l'instant n.
Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.

Exercice 19. Une urne aléatoire
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient une seule boule, qui est blanche. On dispose d'une pièce dont la probabilité de donner Pile est $p \in]0,1[$. Les différents lancers de la pièce sont indépendants. On note $q = 1-p$.
On lance n fois de suite la pièce. On ajoute des boules noires dans l'urne à chaque fois que l'on obtient Pile : 2 pour le premier Pile, 3 pour le deuxième, etc …. On ajoute donc $k+1$ boules noires lors de la $k-$ième obtention de Pile.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus et N la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne à la fin des lancers.

1. Exprimer N en fonction de X. Quelle est la loi de X ?. En déduire l'espérance de N.
   On tire une boule dans l'urne et on pose B : "la boule tirée est blanche".
2. Démontrer avec soin que $\mathbb{P}(B) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ puis calculer cette somme.
   On change la règle : cette fois, on ajoute dans l'urne 2^{k-1} boules noires lors du $k-$ième Pile. On note N' la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne à la fin des lancers.
3. Exprimer N' en fonction de X puis calculer $\mathbb{E}(N')$. Enfin, déterminer la probabilité de B' : "la boule tirée est blanche".

Exercice 20. Utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev
On effectue une suite de lancers d'un dé à six faces. De combien de lancers suffit-il pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 est comprise entre $\frac{1}{6} - 0,01$ et $\frac{1}{6} + 0,01$?

COUPLE DE VARIABLES ALÉATOIRES

Exercice 21. Soient $a > 0$ et X, Y deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que : $\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathbb{P}\left((X = i) \bigcap (Y = j)\right) = \dfrac{a}{2^{i+j}}$.

1. Calculer a, puis déterminer les lois marginales du couple (X, Y).
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 22. Banque CCP MP
Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall (i,j) \in (\mathbb{N})^2, \mathbb{P}\left((X = i) \bigcap (Y = j)\right) = \dfrac{1}{e\, 2^{i+1}\, j!}$.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$
   (b) Déterminer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$
3. les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$

Exercice 23. On considère une urne contenant des boules jaunes, noires et bleues en proportions (non nulles) p, q et r respectivement. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise jusqu'à obtenir pour la deuxième fois une boule bleue. On note X le nombre de tirages effectués, et Y le nombre de boules jaunes obtenues lors de cette série de tirages.

1. Montrer que la probabilité d'obtenir au plus une boule bleue au cours d'une infinité de tirages est nulle. Qu'en déduit-on ? Préciser la loi de X.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$ vérifiant $|a| < 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{n} a^k = \frac{1}{(1-a)^{n+1}}$.
3. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) et en déduire la loi de Y.

Exercice 24. Maximum et minimum de deux variables aléatoires
Soit un entier $n \geqslant 2$. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $S = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de S. (ind : commencer par déterminer pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(S \leqslant k)$). Puis calculer $\mathbb{E}(S)$.
2. Déterminer (presque sans calcul) l'espérance de T, puis l'espérance de la variable aléatoire ST
3. Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 25. Etude d'un couple de variables aléatoires (suite de l'exercice 24)
Soit un entier $n \geqslant 2$. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $S = \max(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (S, X).
2. Déterminer la loi de S. (déjà déterminée dans l'exercice 24 précédent).
3. Déterminer les lois conditionnelles de chacune de ces variables aléatoires X et S, sachant l'autre.
4. Calculer la covariance de S et X. *Indication : on utilisera le résultat obtenu pour $\mathbb{E}(S)$ dans l'exercice 24 précédent et la relation* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

LOIS USUELLES

Exercice 26. Étant donné $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = 4\left\lfloor \dfrac{X}{2} \right\rfloor - 2X + 1$.
Déterminer la loi de Y. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$

Exercice 27. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.
2. Calculer la probabilité que X prenne une valeur paire.

Exercice 28. Maximum de deux lois géométriques
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois géométriques respectives $\mathscr{G}(p)$ et $\mathscr{G}(q)$. On note $Z = \max(X, Y)$. Calculer $\mathbb{E}(Z)$. *(on commencera par calculer $\mathbb{P}(Z > n)$...)*

Exercice 29. Banque CCP MP
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. *Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes*

1. (a) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $\forall m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p). Déterminer la loi de X.

Exercice 30. le problème du collectionneur
Chez un marchand de journaux, on peut acheter des pochettes contenant une image. La collection complète comporte en tout N images distinctes. On note X_k le nombre d'achats ayant permis l'obtention de k images distinctes. En particulier $X_1 = 1$ et X_N est le nombre d'achats nécessaires à l'obtention de la collection complète.

1. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire $X_{k+1} - X_k$.
2. En déduire l'espérance de X_N

Exercice 31. Naissances de filles et de gaçons
On souhaite modéliser la situation suivante : dans une famille, le nombre N d'enfants suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. À chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille est p, et la probabilité qu'il soit un garçon est $q = 1 - p$. On note X le nombre de filles et Y le nombre de garçons.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (N, X). En déduire la loi de X, et celle de Y.
2. Quel est le nombre moyen d'enfants par famille ? le nombre moyen de filles ? le nombre moyen de garçons ?
3. Montrer que les variables X et Y sont indépendantes

Exercice 32. Probabilités et matrices binaires 2×2
On note $\mathscr{M}_2(\{0,1\})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels M telles que $M_{i,j} \in \{0,1\}$ pour tout $i, j \in \{1,2\}$.

1. Combien y a-t-il de matrices $M \in \mathscr{M}_2(\{0,1\})$? parmi celles-ci, combien sont inversibles ? combien sont diagonalisables dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?
2. Soient $B_{1,1}$, $B_{1,2}$, $B_{2,1}$ et $B_{2,2}$ des variables aléatoires indépendantes, suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On définit $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$ et $R = rg(B)$
   Déterminer la loi de la variable aléatoire R. Calculer son espérance.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de p , la probabilité que B soit inversible est-elle maximale ?
4. Pour quelle(s) valeur(s) de p , la probabilité que B soit diagonalisable est-elle maximale ?

FONCTIONS GÉNÉRATRICES

Exercice 33. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = a \exp\left(1 + t^2\right)$, où $a > 0$ est un réel à déteriner.
Déterminer a, puis la loi de X et enfin calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$

Exercice 34. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = \dfrac{1 + a^n}{4n!}$.

1. Déterminer a. Puis, montrer l'existence et calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ en fonction de a.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$
3. Calculer la fonction génératrice G_X de X. Retrouver ainsi $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 35. Une application surprenante des fonctions génératrices

1. Soit le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} t^k$.
   Montrer que P ne peut pas s'écrire $P = QR$ avec $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieurs ou égaux à 5.

2. Montrer que, quelle que soit la façon dont on pipe deux dés, la somme obtenue lors d'un lancer de ces deux dés ne pourra pas suivre une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$

EXERCICES PLUS THÉORIQUES

Exercice 36. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, admettant un moment d'ordre 2. Montrer que $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\mathbb{P}(X>n)$ *(Ind : $2n+1=(n+1)^2-n^2$...)*

Exercice 37. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'évènements de $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. On note $A^* = \bigcap_{N=0}^{+\infty}\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n$.

1. Montrer que A^* appartient à $\mathcal{A}$.

   Montrer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion, alors $A^* = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

   Montrer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion, alors $A^* = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$.

   Interpréter A^*.
2. *Lemme de Borel-Cantelli* : soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'évènements. Montrer que :
   (a) si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}(A^*)=0$
   (b) si les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants et que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors $\mathbb{P}(A^*)=1$

   Indication pour le 2b : on pourra commencer par calculer pour $N \geqslant n$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N}\overline{A_k}\right)$
3. Un singe (immortel) dispose d'une machine à écrire et de papier sans restriction. On suppose que les pressions du singe sur les touches sont ind{ependantes et que toutes les touches ont une probabilité non nulle d'être pressées. Montrer qu'il écrira non seulement une fois, mais même une infinité de fois les oeuvres complètes de Shakespeare.

Exercice 38. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli, deux à deux indépendantes, de paramètres respectifs $(p_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. Démontrer que pour tout $\varepsilon>0$, $\lim_{n\mapsto+\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n}\right|\leqslant\varepsilon\right)=1$.

Exercice 39. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans l'intervalle $[0,1[$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $q_n=\prod_{k=0}^{n}(1-u_k)$. On dira que le produit $\prod(1-u_n)$ est convergent si la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie strictement positive ℓ. On notera alors : $\ell=\prod_{k=0}^{+\infty}(1-u_k)$.

1. Montrer que le produit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum u_k$ converge.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X\geqslant n)>0$. On appelle *taux de panne* associé, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n=\mathbb{P}\left(X=n\middle|X\geqslant n\right)$.
   (a) Exprimer $\mathbb{P}(X\geqslant n)$ en fonction des x_k et en déduire $p_n=\mathbb{P}(X=n)$
   (b) Déterminer les lois des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant un taux de panne constant sur $\mathbb{N}^*$.
   (c) Montrer qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un taux de panne si et seulement si $0\leqslant x_k<1$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ et la série $\sum x_k$ diverge

Exercice 40. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

1. Déterminer, pour tout $u\in\mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{uX}\right)$
2. Soit $u\in\mathbb{R}_+^*$ et $x\in]0,1[$. Montrer que $\mathbb{P}(X\geqslant(1+x)\lambda)\leqslant e^{-(u(1+x)+1-e^u)\lambda}$.
3. soit $x\in]0,1[$. Soit $\varphi_x : u\mapsto u(1+x)+1-e^u$. Montrer que φ_x est majorée sur $\mathbb{R}^+$ et que $\sup_{u\in\mathbb{R}^+}\varphi_x(u)=h(x)$ où $h(x)=(1+x)\ln(1+x)-x$. En déduire que $\mathbb{P}(X\geqslant(1+x)\lambda)\leqslant e^{-\lambda h(x)}$
4. Soit $x\in]0,1[$. Montrer que pour tout $u<0$, $\mathbb{P}(X\leqslant(1-x)\lambda)\leqslant e^{-(u(1-x)+1-e^u)\lambda}$, puis que $\mathbb{P}(X\leqslant(1-x)\lambda)\leqslant e^{-\lambda h(-x)}$.
5. En déduire que, pour tout $x\in]0,1[$, $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|>\lambda x)\leqslant 2\max\left(e^{-\lambda h(x)},e^{-\lambda h(-x)}\right)$.

EXERCICES DE BANQUE CCINP

EXERCICE 95 probabilités

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

EXERCICE 96 probabilités

Soit Xune variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = p_n$.

La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = E\left[t^X\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. Prouver que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $S = X_1 + X_2$.
   Démontrer que $\forall t \in) - 1, 1[, G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$:
   (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
   (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = E\left[t^X\right]$

   Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables indépendantes à valeursdans $\mathbb{N}$
3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac. On note S_n la somme des numéros tirés.
   Soit $t \in]-1,1[$. Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n

EXERCICE 97 probabilités

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2$, $P\left((X,Y) = (j,k)\right) = \dfrac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$.

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

EXERCICE 98 probabilités

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

EXERCICE 99 probabilités

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   Prouver que : $\forall\, a \in]0,+\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

EXERCICE 100 probabilités

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

EXERCICE 101 probabilités

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note B_n l'événement «l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note C_n l'événement «l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

EXERCICE 102 probabilités

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$
   c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

EXERCICE 103 probabilités

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in ([0, +\infty[)^2$.
   Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soit $p \in [0, 1]$. Soit $\lambda \in [0, +\infty[$.
   Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
   Déterminer la loi de X.

EXERCICE 104 probabilités

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $E(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 105 probabilités

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 106 probabilités

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in \,]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.
   En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 107 probabilités

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35} p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

EXERCICE 108 probabilités

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall\, (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

EXERCICE 109 probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

EXERCICE 110 probabilités

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.

   (a) Prouver que $R_X \geqslant 1$.
   On pose $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.

   Pour tout réel t fixé de $[-1, 1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.

2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

EXERCICE 111 probabilités

On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall\, x \in\,]-1, 1[$, $\sum\limits_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in\,]0, 1[$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall\, (k, n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.

EXERCICE 112 probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

VIEIL EXERCICE 96 probabilités

On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall\, x \in\,]-1, 1[$, $\sum\limits_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in\,]0, 1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ (le temps est exprimé en secondes).
On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.
Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t = 1$.
La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser.
Les tirs de laser sont indépendants.
La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.
Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X.
2. Prouver que X admet une espérance et la calculer.