ADJOINT D'UN ENDOMORPHISME D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Exercice 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E espace euclidien.
 Montrer que $\ker(u^*) = (\text{Im}(u))^\perp$ et $\text{Im}(u^*) = (\ker(u))^\perp$

Exercice 2. On rappelle que si pour $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E euclidien, on définit la norme d'opérateur de u par :

$$\|u\| = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

Montrer que l'on a $\|u^*\| = \|u\|$ et $\|u^* \circ u\| = \|u\|^2$

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$.
 Montrer que $\ker(f + f^*) = \ker(f) \cap \ker(f^*)$.

ISOMÉTRIES VECTORIELLES ET MATRICES ORTHOGONALES

Exercice 4. Déterminer la nature de l'endomorphisme f de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire canonique) dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B}$, supposée directe, est donnée ci-dessous. Préciser les éléments caractéristiques de f .

$$A_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} \beta^2 & \beta\sqrt{1-\beta^2} & \sqrt{1-\beta^2} \\ \beta\sqrt{1-\beta^2} & 1-\beta^2 & -\beta \\ \sqrt{1-\beta^2} & -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

où dans la matrice A_4 , β est un paramètre réel $\beta \in]-1, 1[$

Exercice 5. E est un $\mathbb{R}$ ev euclidien orienté de dimension 2. Décrire géométriquement les endomorphismes a , b , c et d de E dont les matrices dans une base orthonormée directe sont :

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Former la matrice dans la base canonique orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe orienté par $\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$

Exercice 7. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.

Exercice 8. Décomposition QR et inégalité de Hadamard

1. Soit $A \in \text{Gl}_n(\mathbb{R})$. En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, montrer que A s'écrit sous la forme $A = QR$ où $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à termes diagonaux > 0 .
2. Application : Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A)^2 \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 \right)$ (inégalité de Hadamard).

Exercice 9. Soient $\mathcal{E} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{F} = (f_j)_{1 \leq j \leq n}$ deux bases orthonormales d'un espace euclidien E . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
 On pose : $\alpha = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (f_i | u(e_j))^2$. Montrer que α ne dépend pas des bases orthonormales choisies.

Exercice 10. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \cap \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est-il fini? Déterminer son cardinal le cas échéant.

Exercice 11. Soit $A \in \text{Gl}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t A = A^2$.

1. Montrer que $A^3 = I_n$ et que A est orthogonale.
2. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A . Montrer que le noyau de $f^2 + f + Id$ est de dimension paire et en déduire la forme de la matrice de f dans une base bien choisie.

Exercice 12. Dans E , $\mathbb{R}$ ev euclidien orienté de dim 3, R est la rotation d'axe orienté vect(u), (u normé) et d'angle φ .

1. Montrer que : $\forall x \in E, R(x) = \cos(\varphi).x + \sin(\varphi).u \wedge x + (1 - \cos(\varphi))(u | x)u$.

2. Application : soit (a, b, c) normé dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique. Déterminer la matrice dans (i, j, k) (base canonique) du demi-tour autour de $\text{Vect}(ai + bj + ck)$.

ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES

Exercice 13. Montrer que $\varphi : P \mapsto (1 - X^2)P'' - 2XP'$ définit un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle P|Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$. Déterminer les valeurs propres de φ .

Exercice 14. Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, $u \in E \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On définit f l'application de E dans E par : $f(x) = x + \alpha(x|u)u$.

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E .
2. Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
3. Déterminer α pour que $f \in \mathcal{O}(E)$. Reconnaître alors f

Exercice 15. Soit E un espace euclidien de dimension n et $a \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Déterminer :

$$\max_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{(x|a(x))}{(x|x)} \quad \text{et} \quad \min_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{(x|a(x))}{(x|x)}$$

Exercice 16. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique à valeurs propres strictement positives.

1. Justifier que u est bijectif, que u^{-1} est aussi symétrique à valeurs propres strictement positives puis que : $\forall x \in E, \quad \|x\| = 1 \implies (u^{-1}(x)|x) \neq 0$

2. Déterminer $\inf_{x \in E, \|x\|=1} \frac{(x|u(x))}{(u^{-1}(x)|x)}$ et $\sup_{x \in E, \|x\|=1} \frac{(x|u(x))}{(u^{-1}(x)|x)}$
on commencera par justifier l'existence de ces bornes sup/inf

Exercice 17. Soient E un espace euclidien, et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Pour $x \in E$, on pose $f(x) = \sum_{k=1}^n (e_k|x) e_k$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E symétrique, tel que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $(f(x)|x) > 0$.
2. En déduire que les valeurs propres de f sont strictement positives et que f est bijective.
3. Montrer qu'il existe un endomorphisme g symétrique, à valeurs propres strictement positives, tel que $g^2 = f^{-1}$.
4. Montrer que $(g(e_1), g(e_2), \dots, g(e_n))$ est une base orthonormale de E . *Indication : Utiliser u_i tel que $f(u_i) = e_i$*

Exercice 18. Endomorphismes symétriques positifs et définis positifs

Soient E un espace euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. On dit que :

* u est *positif* si pour tout $x \in E$, $(u(x)|x) \in \mathbb{R}^+$

* u est *défini positif* si pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $(u(x)|x) \in \mathbb{R}_+^*$

1. Montrer que si u est symétrique positif, alors $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique tel que $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$. Montrer que u est positif. Remarque : on vient de montrer que pour $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique, u positif $\iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$
3. Démontrer de même que pour $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique, " u défini positif $\iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ "

Exercice 19. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f .

Exercice 20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que $\text{tr}(A^2 - 2A + 8I_n) \geq 7n$. Pour quelle(s) matrice(s) y-a-t-il égalité?

Exercice 21. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, dont on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

Exercice 22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que ${}^t A A = A {}^t A$. Montrer que A est la matrice nulle.

Exercice 23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toutes les matrices envisagées dans cet exercice sont carrées d'ordre n à coefficients réels.

1. Soit D une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont positifs et H une matrice orthogonale. Montrer que : $\text{tr}(HD) \leq \text{tr}(D)$
2. Soit S une matrice symétrique dont les valeurs propres sont positives et H une matrice orthogonale. Montrer que : $\text{tr}(HS) \leq \text{tr}(S)$

Exercice 24. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, dont toutes les valeurs propres sont positives.

1. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, dont toutes les valeurs propres sont positives, telle que $B^2 = A$
2. Montrer que B est unique.

Indication : revenir aux endomorphismes canoniquement associés à A et B , et montrer que ces endomorphismes commutent...

Exercice 25. Décomposition polaire d'une matrice inversible

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. On veut montrer qu'il existe un unique couple (O, S) avec O une matrice orthogonale et S une matrice symétrique définie positive tel que $M = OS$.

1. Montrer l'existence d'un tel couple. (Que dire de ${}^t M M$? Construire ensuite S puis enfin $O \dots$)
2. Montrer l'unicité d'un tel couple (Utiliser l'unicité ... de B de l'exercice précédent)

Exercice 26. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $f \circ f^* = f^2 \iff f = f^*$.

Exercice 27. On note S_n^+ l'ensemble des matrices réelles symétriques positives et S_n^{++} l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives.

Montrer que :

1. $\forall S \in S_n^+, \exists R \in S_n^+, S = R^2$
2. $\forall S \in S_n^{++}, \exists R \in S_n^{++}, S = R^2$

DIVERS

Exercice 28. Propriétés topologiques de $O_n(\mathbb{R})$ et de $SO_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont compacts.
2. Montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. $O_n(\mathbb{R})$ est-il connexe par arcs?

Exercice 29. Endomorphismes antisymétriques en dimension 3

Soit $E = \mathbb{R}^3$ euclidien canonique et soit u un endomorphisme de E .

1. Montrer l'équivalence : $\forall (x, y) \in E^2, ((u(x)|y) = -(x|u(y)) \iff \forall x \in E, ((u(x)|x) = 0$.
Un tel endomorphisme u est dit antisymétrique. On suppose dans toute la suite que u est un endomorphisme antisymétrique non nul de E
2. (a) Démontrer que 0 est la seule valeur propre réelle possible de u .
(b) Montrer que le polynôme caractéristique de u a au moins une racine réelle. Qu'en déduit-on pour $\ker u$?
3. Démontrer que $\ker u$ et $\text{Im } u$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .
4. Soit x un vecteur non nul de $\text{Im}(u)$
(a) Démontrer que $(x, u(x))$ est une famille libre de $\text{Im}(u)$
(b) En déduire les dimensions de $\text{Im}(u)$ et $\ker(u)$.
5. Soit (e_1, e_2) une base orthogonale de $\text{Im}(u)$ et e_3 un vecteur unitaire de $\ker(u)$. On pose $\alpha = (u(e_1)|e_2)$. Démontrer

que la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est $B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

EXERCICE 63 algèbre

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(|)$. On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Pour tout endomorphisme u de E , on note u^* l'adjoint de u .

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$ est-il forcément l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
 - i. $u \circ u^* = u^* \circ u$
 - ii. $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$
 - iii. $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$

EXERCICE 66 algèbre

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Prouver que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \in [0, +\infty[$
2. Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
3. Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), AB = BA \implies A^2B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
4. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$

EXERCICE 78 algèbre

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E .

On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E , tel que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
 - (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2 (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
 - (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .