Programme de Colle - Semaine n^{o} 18

Du 27 février 2023 au 03 mars 2023

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él ‘eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d’une semaine à l’autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"B"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B**
ATTENTION : deux questions de "cours" seront posées aux élèves des deux groupes : une question (courte $\sim$ 5 min) d’ordre pratique ou un énoncé précis d’un résultat du cours + une question de cours usuelle (Démo ou exo Banque CCP) pour chaque élève des deux groupes.

Questions courtes ($\sim$ 5 min, d’ordre pratique ou énoncé précis) pour tous les élèves

1. Option 1 : RÃ©pondre Ã l’une des questions suivantes (intÃ©grale, série entière ou loi usuelle)
   Déterminer la nature (convergence ou non convergence) des intégrales suivantes

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$

   Déterminer la convergence des séries numériques suivantes

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} p(1-p)^{n-1}$ avec $p\in]0,1[$

   Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{3n^3-1}{3^n}\,z^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n}\,z^n$

   Déterminer l’espérance et/ou la variance des variables aléatoires suivant l’une des 5 lois usuelles

2. Option 2 : Énoncé précis :
   (a) Changement de variables dans une intégrale impropre
   (b) Théorème de dérivation d’une limite de suite de fonctions
   (c) Intégration par parties généralisée
   (d) Théorème de convergence dominée
   (e) Théorème d’intégration terme à terme
   (f) Théorème de continuité sous domination
   (g) Théorème de Leibniz (dérivation des intégrales à paramètre)
   (h) Définition d’une tribu
   (i) Définition d’une probabilité
   (j) Énoncé du lemme de coalition

Cours

Probabilités

Ensembles dénombrables

- ✏ Définition
- ✏ Une partie de $\mathbb{N}$ est finie ou dénombrable
- ✏ Produit fini, réunion finie ou dénombrable d’ensembles dénombrables
- ✏ $\mathbb{R}$ n’est pas dénombrable

Espaces probabilisés

- ✏ Espace probabilisable : tribu, système complet d’événements
- ✏ Probabilité : Théorème de continuité croissante , th. de continuité décroissante.
- ✏ Inégalité de Boole (ou sous-additivité)
- ✏ Distribution de probabilités discrètes : famille de réels positifs indexée par Ω sommable de somme 1 (le support de cette distribution est alors fini ou dénombrable). Cette distribution $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs définit une unique probabilité
- ✏ Probabilité conditionnelle : définition, formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes
- ✏ Indépendance : famille d’événements mutuellement indépendants

Variables aléatoires discrètes

- ✏ Variable aléatoire discrète .Loi de probabilité d'une v.a.d.
- ✏ Couple de v.a.d. : lois marginales, loi conjointe, indépendance
- ✏ Indépendance mutuelle d'une famille finie de v.a.d. : lemme des coalitions
- ✏ Lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson

Espérance, Variance

- ✏ Espérance : définition, propriétés, formule de transfert.

  Pour une variable aléatoire X à valeurs entières, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$
- ✏ Variance : Moments d'ordre m, variance, écart-type, Covariance, Loi faible des grands nombres

Espaces pré-hilbertiens réels

Produit scalaire

- ✏ Produit scalaire. Norme euclidienne (ou pré-hilbertienne)
- ✏ Propriétés : identité de polarisation, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski

Orthogonalité

- ✏ Famille orthogonale, famille orthonormale
- ✏ Orthonormalisation de Schmidt
- ✏ Expressions dans une base orthonormale d'un espace euclidien
- ✏ Orthogonalité de parties d'un espace pré-hilbertien
- ✏ Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.
- ✏ Projections et symétries orthogonales.
- ✏ Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie

Endomorphismes d'un espace euclidien

Adjoint d'un endomorphisme

- ✏ Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien
- ✏ Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien
- ✏ Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint
- ✏ Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée.
- ✏ Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*

Exercices et questions de cours

1. **TOUS** Espérance, variance, fonction génératrice des lois usuelles (une ou deux par élève...)
2. Inégalité de Boole (ou sous-additivité)
3. **TOUS** Théorème de continuité croissante
4. **E3A** Inégalité de Markov
5. **E3A** Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
6. Loi faible des grands nombres
7. **TOUS** Variance d'une somme de v.a.r.d. indépendantes
8. **TOUS** Cauchy-Schwarz $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$
9. **TOUS** Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire
10. **TOUS** Théorème de la projection orthogonale (distance entre entre un point et un s.e.v. de dimension finie est atteinte)
11. **Banque CCP MP**
    Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. *Remarque : les questions (a) et (b) sont indépendantes*
    (a) i. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
       ii. En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
    (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $\forall m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p). Déterminer la loi de X.

12. **Banque CCP 111**
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
   (a) Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.
      i. Prouver que $R \geqslant 1$. On pose alors $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
      Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.
      Pour tout réel t fixé, exprimer G_X sous forme d'une espérance.
      ii. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
   (b) i. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
      Déterminer D_{G_X} et, $\forall\, t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
      ii. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
      Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

13. **Banque CCP MP**
Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :
$\forall (i,j) \in (\mathbb{N})^2, \mathbb{P}\left((X = i) \bigcap (Y = j)\right) = \dfrac{1}{e\, 2^{i+1}\, j!}$.
   (a) Déterminer les lois de X et Y.
   (b) i. Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$
      ii. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$
   (c) les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   (d) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$

14. **Banque CCP MP 77**
Soit E un espace euclidien.
   (a) Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp = A$.
   (b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
      i. Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
      ii. Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

15. **TOUS Banque CCP MP 78**

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.
   (a) Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
      i. Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
      ii. Démontrer que u est bijectif.
   (b) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.
   (c) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

16. **Banque CCP 80**
Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
   (b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

17. **Banque CCP 63**
Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$. On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.
   (a) Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E, \big(u(x)\big|x\big) = 0$ est-il forcément l'endomorphisme nul ?

(b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i. $u \circ u^* = u^* \circ u$

ii. $\forall (x, y) \in E^2, \big(u(x)\big|u(y)\big) = \big(u^*(x)\big|u^*(y)\big)$

iii. $\forall x \in E, \big\|u(x)\big\| = \big\|u^*(x)\big\|$

Prochains programmes : **Endomorphismes symétriques. Equations différentielles**

GROUPES DE COLLES
Groupe B : classés par ordre croissant des groupes de colles
HAMON (2) & HATON (2) , DEMOL (4) & VULIN (4) , GAUTHERET A. (6) & GUILLARD (6) & LE BRIS (6) , DESEINE (8)
GUITTONNY (10) & PELLETIER (10) & RICARD (10) , DURAND (12) & GODEREAUX (12)
Groupe A : les autres