Révisions de première année

Exercice 1. Résoudre sur des sous intervalles de $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{R}$ les équations :

1. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
2. $x\left(1+x^2\right)y' - \left(x^2-1\right)y = -2x$
3. $y'' + y = t^2\cos^2(t)$
4. $xy' - y = \dfrac{x}{1+x^2}$
5. $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$
6. $y'\cos(t) + y\sin(t) = \cos^2(t)$
7. $t^n x' - x = 0$ $(n \geqslant 2)$
8. $xy' - y = -x^2e^x$
9. $(1-x^2)y' + xy = x$

Exercice 2.
1. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $\left(1+x^2\right)^2 y'' + 2(x-1)\left(1+x^2\right)y' + y = 0$ en posant $t = \arctan(x)$
2. Résoudre sur $]-1,1[$: $\left(1-x^2\right)y'' - xy' + 4y = \arccos x$ en posant $x = \cos t$

Equations différentielles linéaires et DSE

Exercice 3. On considère l'équation différentielle (E) : $(1-x^2)y' - xy = 2$
1. Déterminer les solutions de (E) qui sont développables en série entière au voisinage de 0.
2. Résoudre (E) sur]-1,1[puis développer $x \to (\arcsin x)^2$ en série entière au voisinage de 0 .

Exercice 4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} - \dfrac{a_n}{n+1}$. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et on note f la fonction somme de cette série.
1. Montrer que f est solution sur $]-R,R[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E).
2. Résoudre (E), en déduire f, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le rayon de convergence R.

Systèmes différentiels linéaires

Exercice 5. Résoudre les systèmes différentiels suivants (on recherche des fonctions x, y, z de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de la variable t)

1. $\begin{cases} x' = 4x - 3y - 3z \\ y' = 3x - 2y - 3z \\ z' = 3x - 3y - 2z \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = 2x - y - 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = x + y + z \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = 3x + 2y - 2z \\ y' = -x + z \\ z' = x + y \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = 3x - 2y + 2e^t \\ y' = 4x - 3y + e^t \\ z' = -2x + y - 1 \end{cases}$

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$
1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer le polynôme minimal de A. En déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice e^{tA}.
3. Résoudre le système différentiel $X' = AX$ d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$
1. Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$? Diagonaliser A si c'est possible.
2. On considère le système différentiel (S) : $\dfrac{dX}{dt} = AX$. Déterminer la solution X_0 de (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. On l'exprimera uniquement à l'aide de fonctions réelles.

Exercice 8. Un système différentiel du second ordre
Résoudre le système différentiel suivant $\begin{cases} x'' = -3y' + 4x - 6y \\ y'' = -x' - 2x + 4y \end{cases}$

Exercice 9. On considère le système $\left\{ \begin{array}{lclclcl} (1+t^2)x' & = & tx & + & y & + & 2t^2 - 1 \\ (1+t^2)y' & = & -x & + & ty & + & 3t \end{array} \right.$

1. Déterminer un système fondamental de solutions formé de fonctions dont les composantes sont des polynômes de degré 1 au plus.
2. Résoudre le système.

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exercice 10. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{1+x^2}$
(on commencera par résoudre l'équation homogène, puis on utilisera la méthode de Lagrange pour obtenir une solution particuli'ere de l'équation complète)

Exercice 11. On considère $(E) : (2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$.
1. Déterminer une solution de la forme $x \mapsto e^{ax}$ où $a \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre (E) sur les intervalles $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$
3. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions définies et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$? Commenter.

Exercice 12. Soit l'équation différentielle $(E) : xy'' + 2y' + xy = 0$.
1. Chercher les solutions de (E) développables en série entière.
   Déterminer le rayon de convergence, et exprimer ces solutions à l'aide des fonctions usuelles.
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 13. Déterminer les solutions sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos^2 x}$$

Des équations fonctionnelles

Exercice 14. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2f(x) = 3x \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

Exercice 15. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,dt + 1$$

Divers

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f + f'' \geqslant 0$. On note $g = f + f''$. En utilisant la méthode de variation des constantes, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

Exercice 17.
1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f'(x) + f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   Indication : poser $g = f' + f$, et résoudre l'équation différentielle $y' + y = g$. En déduire une expression intégrale de $f(x)$. Utiliser alors un raisonnement "avec des ε" pour trouver la limite demandée.
2. En déduire que si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $h''(x) + 2h'(x) + h(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $h(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 18. Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + q(x)y = 0$.
1. Montrer que si f est une solution bornée de (E) alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
2. Soit (f, g) un système fondamental de solutions de (E). Démontrer que leur wronskien $W = fg' - f'g$ est une constante.
3. (E) admet-elle des solutions non bornées ?

Exercice 19. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
Montrer que les solutions du système différentiel $X' = AX$ tendent toutes vers 0 quand $t \to +\infty$ si et seulement si les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

Exercice 20. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$ une matrice dont les valeurs propres n'appartiennent pas à l'ensemble $\{2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
1. Montrer que $e^A - I_m$ est inversible.
2. Soit $B : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^m$ une application continue et 1-périodique. Montrer que le système différentiel $(E) : \quad X' = AX + B(t)$ admet une unique solution 1-périodique.

Exercice 21. Soit (E_1, E_2) un système fondamental de solutions de $Y' = A(t)Y$ où A est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que le Wronskien (dans la base canonique) de ce système satisfait l'équation différentielle $W' = \operatorname{tr}(A(t))W$.

EXERCICE 31 analyse

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

EXERCICE 32 analyse

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0; 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$?

EXERCICE 42 analyse

On considère les deux équations différentielles suivantes :
$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

EXERCICE 74 algèbre

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
2. On considère le système différentiel $\left\{ \begin{array}{l} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{array} \right.$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
   En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

*

EXERCICE 75 algèbre

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\left\{ \begin{array}{l} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{array} \right.$.