

Chapitre 13

Equations différentielles

Contents

13.1 Equation différentielle linéaire scalaire du premier ordre	270
13.1.1 Equations normalisées en y'	270
13.1.1.1 Les différents problèmes posés	270
13.1.1.2 Solutions de (E_H)	270
13.1.1.3 Solutions de (E)	271
13.1.1.4 Théorème de Cauchy	271
13.1.2 Equations non normalisées en y'	272
13.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre	272
13.2.1 Propriétés générales	272
13.2.1.1 Différentes formes des équations	272
13.2.1.2 Théorème de Cauchy linéaire	273
13.2.2 Structures des ensembles de solutions	274
13.2.2.1 Solutions de l'équation homogène $(E_H) : x' = a(t)(x)$	274
13.2.2.2 Solutions de l'équation avec second membre $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$	274
13.3 Équation différentielle linéaire à coefficients constants	275
13.3.1 Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice.	275
13.3.2 Solutions de $(E_H) : x' = a(x)$	277
13.3.3 Résolution de $(E) : x' = a(x) + b(t)$	278
13.4 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre n	279
13.4.1 Cas général	279
13.4.1.1 Définitions	279
13.4.1.2 Equivalence avec un système	279
13.4.1.3 Théorèmes	280
13.4.2 Equations différentielles linéaires du second ordre	280
13.4.2.1 Cas de l'équation normalisée en y''	280
13.4.2.2 Cas particulier de l'équation à coefficients constants	281
13.4.2.3 Pratique de résolution dans le cas général	281

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

13.1 Equation différentielle linéaire scalaire du premier ordre

Dans ce paragraphe $n = 1$, les fonctions considérées sont donc à valeurs dans $\mathbb{K}$

On donne trois fonctions α , β et γ définies et continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ et l'on cherche toutes les fonctions y définies et dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que :

$$\forall t \in I, \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$$

équation différentielle que l'on résume en :

$$\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t) \quad (E)$$

DEFINITION

(E) est dite **normalisée** lorsque α est la fonction constante 1 ou une fonction ne s'annulant pas sur I , de sorte que (E) est équivalente à l'équation $y' + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}y = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$ encore notée (E) .

13.1.1 Equations normalisées en y'

13.1.1.1 Les différents problèmes posés

⇒ L'équation (E) s'écrit : $y' + a(t)y = b(t)$ où a et b sont continues sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

⇒ **DEFINITION**

L'équation homogène associée est $(E_H) : y' + a(t)y = 0$.

⇒ Une solution de (E) est une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable telle que : $\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$

⇒ **DEFINITION**

Soit $t_0 \in I$ et $z_0 \in \mathbb{K}$, le **problème de Cauchy** associé à (E) en (t_0, z_0) est :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = z_0 \end{cases}$$

c'est donc l'équation (E) assortie d'une condition initiale.

13.1.1.2 Solutions de (E_H)

⇒ **PROPRIETE**

L'ensemble $S(E_H)$ des solutions de (E_H) est la droite vectorielle engendrée par la fonction $y_1 : \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & e^{-A(t)} \end{pmatrix}$ où A est une primitive sur I de a .

Dem.

⇒ **Remarque** : Une solution f de (E_H) est donc soit la fonction nulle (lorsque $\mu = 0$) soit une fonction ne s'annulant pas sur I (lorsque $\mu \neq 0$). On pourra donc, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, chercher les solutions autres que la fonction nulle en écrivant :

$$\begin{aligned} y \text{ solution non nulle de } (E_H) &\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a(t) \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall t \in I, \ln(|y(t)|) = -A(t) + \alpha \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall t \in I, |y(t)| = e^{-A(t)+\alpha} = e^\alpha e^{-A(t)} \end{aligned}$$

y ne s'annulant pas sur I , on a :

ou bien $\forall t \in I, y(t) > 0$ et dans ce cas $y(t) = \mu e^{-A(t)}$ avec $\mu = e^\alpha$

ou bien $\forall t \in I, y(t) < 0$ et dans ce cas $y(t) = \mu e^{-A(t)}$ avec $\mu = -e^\alpha$

13.1.1.3 Solutions de (E)

⇒ **PROPRIETE**

Si y_0 est une solution de (E) , l'ensemble $S(E)$ des solutions de (E) est la droite affine passant par y_0 et dirigée par $S(E_H) : S(E) = \{y_0\} + \text{Vect}(y_1)$.

Dem.

⇒ **Méthode de variation de la constante**

Si aucune solution particulière de (E) n'est connue, on en détermine une de la forme $y_0(t) = \mu(t)y_1(t)$ avec $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable :

$$\begin{aligned} y_0 \text{ solution sur } I \text{ de } (E) &\Leftrightarrow \forall t \in I, \mu'(t)y_1(t) + \mu(t)[y_1'(t) + a(t)y_1(t)] = b(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in I, \mu'(t)y_1(t) = b(t) \quad (\text{car } y_1 \text{ solution de } (E_H)) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in I, \mu'(t) = b(t)e^{A(t)} \end{aligned}$$

La fonction $t \rightarrow b(t)e^{A(t)}$ étant continue sur I , elle admet des primitives, si B est l'une d'elles, alors $y_0 : t \rightarrow B(t)y_1(t)$ est une solution de (E) .

13.1.1.4 Théorème de Cauchy

⇒ **PROPRIETE**

$\forall (t_0, z_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy en (t_0, z_0) associé à l'équation $(E) :$

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = z_0 \end{cases}$$

a une et une seule solution.

Dem.

13.1.2 Equations non normalisées en y'

$$\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t) \quad (E)$$

avec α, β, γ continues sur I .

⇒ Une solution de (E) est une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{K}$, dérivable et vérifiant : $\forall t \in I, \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$

⇒ **PROPRIETE**

Les solutions $S(E_H)$ de (E_H) constituent un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

⇒ **PROPRIETE**

Si y_0 est une solution de (E) , une fonction y est solution de (E) si et seulement si la fonction $y - y_0$ est solution de (E_H) . L'ensemble $S(E)$ des solutions de (E) est donc soit l'ensemble vide, soit un espace affine dirigé par $S(E_H)$.

⇒ **Attention** : On ne dispose d'aucun résultat général dans ce cas concernant l'existence de solutions ou, lorsqu'il n'est pas vide, la dimension de l'espace affine $S(E)$. On se place sur des sous intervalles sur lesquels α ne s'annule pas, on résout l'équation sur chacun de ces sous intervalles et on essaie de raccorder les solutions obtenues.

13.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Dans ce paragraphe, les équations seront toutes normalisées en x' .

13.2.1 Propriétés générales

13.2.1.1 Différentes formes des équations

⇒ **DEFINITION**

La forme générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre est : $(E) : x' = a(t)x + b(t)$ où a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ et b une application continue de I dans E . La fonction inconnue x est une fonction dérivable sur I et à valeurs dans E .

⇒ Une fonction x est solution sur I de (E) lorsque : x est une fonction dérivable sur I et à valeurs dans E et, $\forall t \in I, x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$.

⇒ **DEFINITION**

L'équation homogène associée à (E) est $(E_H) : x' = a(t)x$.

⇒ De telles équations se présentent aussi sous forme matricielle : $X' = A(t)X + B(t)$ où A est une application continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, B une application continue de I dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et X une application dérivable de I dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. L'équivalence des deux formes est claire lorsque l'on munit E d'une base et que l'on représente tous les objets de la première forme par leurs matrices dans cette base.

⇒ La forme matricielle de l'équation (E) est souvent écrite sous forme de système :

$$\begin{cases} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1j}(t)x_j + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x'_i &= a_{i1}(t)x_1 + \dots + a_{ij}(t)x_j + \dots + a_{in}(t)x_n + b_i(t) \\ x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nj}(t)x_j + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

où les fonctions a_{ij} et b_i sont continues de I dans K .

⇒ **PROPRIETE Principe de superposition**

si x_1 est solution de l'équation $(E_1) : x' = a(t)(x) + b_1(t)$
 si x_2 est solution de l'équation $(E_2) : x' = a(t)(x) + b_2(t)$
 alors $x_1 + x_2$ est solution de l'équation $(E_3) : x' = a(t)(x) + b_1(t) + b_2(t)$.

(les deux équations ont la même équation homogène, seul le second membre a changé),

⇒ **DEFINITION**

Si $(t_0, z_0) \in I \times E$, le problème de Cauchy associé à (E) en ce point est le système :

$$\begin{cases} x' = a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) = z_0 \end{cases}$$

13.2.1.2 Théorème de Cauchy linéaire

⇒ **THEOREME Théorème de Cauchy linéaire**

a et b étant continues sur I , $\forall (t_0, z_0) \in I \times E$, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) = z_0 \end{cases} \quad \text{admet une unique solution.}$$

Dem.

⇒ **PROPRIETE Principe de superposition**

si a, b_1 et b_2 sont continues sur I ,
 si x_1 est la solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} x' = a(t)(x) + b_1(t) \\ x(t_0) = z_1 \end{cases}$
 si x_2 est la solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} x' = a(t)(x) + b_2(t) \\ x(t_0) = z_2 \end{cases}$
 alors $x_1 + x_2$ est la solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} x' = a(t)(x) + b_1(t) + b_2(t) \\ x(t_0) = z_1 + z_2 \end{cases}$

⇒ **PROPRIETE Forme intégrale du problème de Cauchy**

x est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} x' = a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) = z_0 \end{cases}$ si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad x(t) = z_0 + \int_{t_0}^t (a(u)(x(u)) + b(u)) du$$

13.2.2 Structures des ensembles de solutions

13.2.2.1 Solutions de l'équation homogène $(E_H) : x' = a(t)(x)$

⇒ PROPRIETE

L'ensemble $S(E_H)$ des solutions sur I de E_H est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

⇒ PROPRIETE

Pour tout α dans I , $\varphi_\alpha : \begin{pmatrix} S(E_H) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x(\alpha) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme.

⇒ PROPRIETE

$S(E_H)$ est donc de dimension finie, égale à $n = \dim(E)$.

⇒ DEFINITION

On appelle système fondamental de solutions de (E_H) toute base $(y_1, \dots, y_n)$ de $S(E_H)$.

⇒ DEFINITION

Si $\mathcal{B}$ est une base de E et $(y_1, \dots, y_n)$ un n -uplet de fonctions de $S(E_H)$, on appelle Wronskien de $(y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathcal{B}$ la fonction $W : \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \det_{\mathcal{B}}(y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{pmatrix}$

⇒ PROPRIETE

La fonction W est ou bien la fonction nulle, ou bien une fonction ne prenant pas la valeur 0.

Dem.

⇒ PROPRIETE

$(y_1, \dots, y_n)$ est un système fondamental de solutions de (E_H) lorsque son Wronskien ne s'annule pas.

13.2.2.2 Solutions de l'équation avec second membre $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$

⇒ PROPRIETE

Si y_0 est une solution de (E) , l'ensemble $S(E)$ des solutions de (E) sur I est l'espace affine $\{y_0\} + S(E_H)$.

⇒ PROPRIETE

Si $(y_1, \dots, y_n)$ est un système fondamental de solutions de (E_H) , toute fonction $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$ peut s'écrire $b = \sum_{i=1}^n \beta_i y_i$ avec pour tout i , β_i une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$.

Dem.

⇒ **PROPRIETE Méthode de variation des constantes**

Si $(y_1, \dots, y_n)$ est un système fondamental de solutions de (E_H) , il existe n fonctions dérivables sur $I : \mu_1, \dots, \mu_n$ telles que $y_0 = \sum_{i=1}^n \mu_i y_i$ soit une solution de (E) .
On a alors $S(E) = \{y_0\} + \text{Vect}(y_1, \dots, y_n)$.

Dem.

13.3 Équation différentielle linéaire à coefficients constants

Dans tout ce paragraphe, a est un endomorphisme de E .

On s'intéresse à l'équation $(E_H) : x' = a(x)$. La fonction $t \rightarrow a(t)$ est ici la fonction constante $t \rightarrow a$ qui est bien continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(E)$.

La variable t n'apparaît pas dans l'équation $x' = a(x)$, celle-ci est dite "**à coefficients constants**" (ou **autonome**), ses solutions seront définies sur $\mathbb{R}$.

13.3.1 Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice.

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), donc E peut être normé (par exemple, si $(e_1, \dots, e_d)$ est une base de E , on définit une norme en posant $N_E(x_1 e_1 + \dots + x_d e_d) = \sup_{k \in \{1, \dots, d\}} |x_k|$, les autres normes sont alors équivalentes à celle-ci).

⇒ **PROPRIETE**

$N : \left(\begin{array}{ll} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ a & \longmapsto \sup_{x \neq 0} \frac{N_E(a(x))}{N_E(x)} \end{array} \right)$ est une norme d'algèbre dans $\mathcal{L}(E)$.

Dem.

⇒ **PROPRIETE**

Pour tout $a \in \mathcal{L}(E)$, la série $\sum \frac{1}{n!} a^n$ est absolument convergente dans $(\mathcal{L}(E), N)$

Dem.

⇒ $\mathcal{L}(E)$ étant une algèbre normée de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la série $\sum \frac{1}{n!} a^n$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$.

⇒ **DEFINITION Exponentielle d'un endomorphisme**

L'endomorphisme exponentielle de a noté e^a ou $\exp(a)$ est défini par $e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n$.

⇒ **PROPRIETE**

$e^a \in \mathbb{K}[a]$, donc en particulier, e^a commute avec a .

Dem.

⇒ PROPRIETE

La fonction $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ a & \longmapsto & e^a \end{array} \right)$ est continue.

Dem.

⇒ PROPRIETE

Pour tout $a \in \mathcal{L}(E)$, la fonction $f_a : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ t & \longmapsto & e^{ta} \end{array} \right)$ est dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}, f'_a(t) = a \circ f_a(t) = f_a(t) \circ a$. f_a est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Dem.

⇒ PROPRIETE

Si les endomorphismes a et b commutent, alors $e^a \circ e^b = e^{a+b} = e^{b+a} = e^b \circ e^a$.

Dem.

⇒ PROPRIETE

En particulier, $\forall a \in \mathcal{L}(E)$, e^a est un automorphisme et $(e^a)^{-1} = e^{-a}$.

⇒ On a des propriétés similaires pour l'exponentielle d'une matrice carrée A , à savoir :

✓ PROPRIETE

Il existe une norme sous-multiplicative dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Dem.

✓ PROPRIETE

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{1}{n!} A^n$ est absolument convergente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc convergente

✓ DEFINITION Exponentielle d'une matrice

La matrice exponentielle de A noté e^A ou $\exp(A)$ est définie par $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

✓ PROPRIETE

$e^A \in \mathbb{K}[A]$, donc en particulier, e^A commute avec A .

✓ PROPRIETE

La fonction $\begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & e^A \end{pmatrix}$ est continue.

✓ PROPRIETE

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction $f_A : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & e^{tA} \end{pmatrix}$ est dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'_A(t) = A \times f_A(t) = f_A(t) \times A$. f_A est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

✓ PROPRIETE

Si les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ A et B commutent, alors $e^A \times e^B = e^{A+B} = e^{B+A} = e^B \times e^A$.

✓ En particulier, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, e^A est une matrice inversible d'inverse $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

⇒ PROPRIETE

Si A est la matrice diagonale $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ alors $\exp(A) = \text{diag}(\exp(d_1), \dots, \exp(d_n))$

Dem.

⇒ PROPRIETE

Si A est la matrice triangulaire de coefficients diagonaux $(t_1, \dots, t_n)$ alors $\exp(A)$ est une matrice triangulaire (de même coté que A) et de coefficients diagonaux $(\exp(t_1), \dots, \exp(t_n))$

⇒ PROPRIETE

Si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables avec $B = P^{-1}AP$ où P inversible. Alors $\exp(B) = P^{-1} \exp(A)P$

Dem.

⇒ PROPRIETE

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\text{Sp}(\exp(A)) = \{e^z | z \in \text{Sp}(A)\}$. De plus la multiplicité de la valeur propre λ de A et la multiplicité de la valeur propre $\exp(\lambda)$ de $\exp(A)$ sont identiques

Dem.

⇒ COROLLAIRE

$\exp(\text{Tr}(A)) = \det(\exp(A))$

13.3.2 Solutions de $(E_H) : x' = a(x)$

⇒ Rappel : lorsque $n = 1$ (i.e. $E = \mathbb{K}$), et $a \in \mathbb{K}$:

* Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $t \rightarrow ke^{ta}$, $k \in \mathbb{K}$.

* La solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = ay \\ y(t_0) = z_0 \end{cases}$ est la fonction $t \rightarrow e^{(t-t_0)a} z_0$.

⇒ Dans le cas général :

PROPRIETE

* Les solutions de $x' = a(x)$ sont les fonctions $t \rightarrow e^{ta}(v)$ où v est un vecteur quelconque de E .

* Plus précisément, si $t_0 \in \mathbb{R}$ et $z_0 \in E$, l'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} x' = a(x) \\ x(t_0) = z_0 \end{cases}$ est la fonction $t \rightarrow e^{(t-t_0)a}(z_0)$.

⇒ PROPRIÉTÉ

Si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E , les fonctions $y_i : t \rightarrow e^{ta}(v_i)$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ constituent un système fondamental de solutions de $x' = a(x)$.

⇒ Résolution pratique du système différentiel $X' = AX$ (X matrice colonne, A matrice carrée)

* Si A est diagonalisable, soit $(V_1, \dots, V_n)$ une base propre où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $AV_i = \mu_i V_i$, on obtient un système fondamental $(Y_1, \dots, Y_n)$ en posant : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y_i(t) = e^{\mu_i t} V_i$

* Si A est trigonalisable : $A = PTP^{-1}$ avec P inversible et T triangulaire. On a alors : $X' = AX \Leftrightarrow P^{-1}X' = TP^{-1}X \Leftrightarrow X = PZ$ et $Z' = TZ$.

Le système $Z' = TZ$ est triangulaire et se résout en commençant par la dernière équation, les solutions des équations $i+1$ à n seront dans le second membre de l'équation i , linéaire du premier ordre.

* Remarque : la méthode employée dans le cas où A est trigonalisable peut être utilisée dans le cas où A est diagonalisable (T sera une matrice diagonale et les équations du système $Z' = TZ$ seront indépendantes les unes des autres et de la forme $z'_i = \mu_i z_i$).

13.3.3 Résolution de $(E) : x' = a(x) + b(t)$

b est une fonction continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers E .

⇒ L'intervalle de définition des solutions sera I .

⇒ La résolution de l'équation homogène $x' = a(x)$ fournit un système fondamental $(y_1, \dots, y_n)$, on pourra trouver une solution particulière de (E) en appliquant la méthode de variation des constantes : on sait qu'il existe des fonctions continues $\beta_1, \dots, \beta_n$ telles que : $\forall t \in I$, $b(t) = \sum_{k=1}^n \beta_k(t) y_k(t)$ et on cherche des fonctions $\mu_1, \dots, \mu_n$ dérivables sur I telles que $y_0 = \sum_{k=1}^n \mu_k y_k$ soit solution de (E) . Pour cela il faut et il suffit que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mu'_k = \beta_k$.

⇒ Résolution pratique du système différentiel $X' = AX + B(t)$ (X et $B(t)$ matrices colonnes, A matrice carrée)

* Si A est diagonalisable, on dispose d'un système fondamental de solutions de $(E_H) : (Y_1, \dots, Y_n)$ on peut donc déterminer une solution particulière par la méthode de variation des constantes c'est à dire chercher une solution Y_0 de la forme $Y_0(t) = \mu_1(t)Y_1(t) + \dots + \mu_n(t)Y_n(t)$ où les μ_i sont des fonctions dérivables.

* Si A est trigonalisable : $A = PTP^{-1}$ avec P inversible et T triangulaire. On a alors : $X' = AX + B(t) \Leftrightarrow P^{-1}X' = TP^{-1}X + P^{-1}B(t) \Leftrightarrow X = PZ$ et $Z' = TZ + P^{-1}B(t)$. Ce dernier système est triangulaire et se résout en commençant par la dernière équation, les solutions des équations $i+1$ à n seront dans le second membre de l'équation i , linéaire du premier ordre.

* Remarque 1 : la méthode employée dans le cas où A est trigonalisable peut être utilisée dans le cas où A est diagonalisable (T sera dans ce cas une matrice diagonale)

* Remarque 2 : lorsque le système différentiel a un second membre, il est nécessaire de connaître la matrice P^{-1} . Lorsque A est symétrique, on aura donc intérêt à choisir P orthogonale ($P^{-1} = {}^t P$ sans aucun calcul).

13.4 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre n

13.4.1 Cas général

n est un entier naturel non nul, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ et b sont $n+1$ fonctions continues, définies sur un même intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

13.4.1.1 Définitions

⇒ L'équation différentielle linéaire d'ordre n associée à ces données est :

$$(E) \quad y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)y^{(n-2)} + \dots + a_0(t)y + b(t)$$

⇒ L'équation homogène est :

$$(E_H) \quad y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)y^{(n-2)} + \dots + a_0(t)y$$

⇒ Les solutions de (E) sont les fonctions n fois dérivables sur I telles que :

$$\forall t \in I, \quad y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}(t)y^{(n-2)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) + b(t)$$

⇒ Si $t_0 \in I$ et $(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, le problème de Cauchy en t_0 , $(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ est le système

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)y^{(n-2)} + \dots + a_0(t)y + b(t) \\ \forall k \in \langle 0, n-1 \rangle, \quad y^{(k)}(t_0) = z_k \end{cases}$$

13.4.1.2 Equivalence avec un système

⇒ Soit $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$, on lui associe la fonction $X : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie

$$\text{par : } \forall t \in I, \quad X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

⇒ y est n fois dérivable sur I si et seulement si X est dérivable sur I .

⇒ y est solution de (E) : $y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)y^{(n-2)} + \dots + a_0(t)y + b(t)$ si et seulement si X est solution de $X' = A(t)X + B(t)$ où

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & \dots & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

⇒ y est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)y^{(n-2)} + \dots + a_0(t)y + b(t) \\ \forall k \in \langle 0, n-1 \rangle, \quad y^{(k)}(t_0) = z_k \end{cases}$$

si et seulement si X est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(t_0) = Z_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad Z_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$$

13.4.1.3 Théorèmes

⇒ PROPRIETE

Pour tout $(t_0, z_0, \dots, z_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)y^{(n-2)} + \dots + a_0(t)y + b(t) \\ \forall k \in \{0, \dots, n-1\}, y^{(k)}(t_0) = z_k \end{cases} \quad \text{a une unique solution.}$$
⇒ PROPRIETE

L'ensemble $S(E_H)$ des solutions de (E_H) est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

⇒ PROPRIETE

Pour tout $\alpha \in I$, l'application $\begin{pmatrix} S(E_H) & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ y & \longmapsto & (y(\alpha), \dots, y^{(n-1)}(\alpha)) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme. $S(E_H)$ est donc de dimension n .

⇒ PROPRIETE

Si y_0 est une solution de (E) , l'ensemble des solutions de (E) est l'espace affine $\{y_0\} + S(E_H)$.

13.4.2 Equations différentielles linéaires du second ordre

13.4.2.1 Cas de l'équation normalisée en y''

$(E) : y'' = a(t)y' + b(t)y + c(t)$ (a, b, c) continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

⇒ (E) est équivalente au système différentiel du premier ordre $(S) : X' = A(t)X + B(t)$ où :

$$\forall t \in I, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} \text{ avec } X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

⇒ PROPRIETE

$\forall t_0 \in I, \quad \varphi_{t_0} : \begin{pmatrix} S(E_H) & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ y & \longmapsto & (y(t_0), y'(t_0)) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme.
Par conséquent, $S(E_H)$ est un plan vectoriel.

⇒ PROPRIETE

Si y_0 est une solution, $S(E)$ est le plan affine $\{y_0\} + S(E_H)$.

⇒ PROPRIETE

Si $(y_1, y_2) \in S(E_H)^2$, le Wronskien de ce système est la fonction W :

$$\begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \end{pmatrix}. \quad W \text{ est soit la fonction nulle, soit une fonction qui ne s'annule en aucun point de } I.$$

Dem.

⇒ DEFINITION

Si $(y_1, y_2) \in S(E_H)^2$, on dit que (y_1, y_2) est un système fondamental lorsque c'est une base du plan $S(E_H)$. C'est le cas lorsque le Wronskien de ce système ne s'annule pas sur I .

⇒ **Remarques :**

- * W est solution de l'équation linéaire du premier ordre $W' = a(t)W$
- * Lorsque a est la fonction nulle, c'est à dire lorsque (E_H) est de la forme $y'' = b(t)y$, le Wronskien d'un couple (y_1, y_2) de solutions de (E_H) est une fonction constante.

⇒ **PROPRIETE Variation des constantes**

Si (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de (E_H) , on obtient une solution y_0 de E en posant $y_0 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ où λ_1 et λ_2 sont des fonctions dérivables dont les dérivées vérifient : $\forall t \in I, \begin{cases} \lambda_1'(t)y_1(t) + \lambda_2'(t)y_2(t) = 0 \\ \lambda_1'(t)y_1'(t) + \lambda_2'(t)y_2'(t) = c(t) \end{cases}$

13.4.2.2 Cas particulier de l'équation à coefficients constants

$(E) : y'' = ay' + by + c(t)$ ($(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et c continue sur un I , à valeurs dans $\mathbb{K}$).

- ⇒ Le système associé est dans ce cas $X' = AX + B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$.
- ⇒ L'équation caractéristique de (E) est $\chi_A(X) = 0$ soit encore $X^2 = aX + b$.
- ⇒ **Premier cas** : L'équation caractéristique a deux racines distinctes α et β dans le corps $\mathbb{K}$.
 (E_H) a pour solutions les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{K}$ des fonctions $y_1 : t \rightarrow e^{\alpha t}$ et $y_2 : t \rightarrow e^{\beta t}$. (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de (E_H) .
- ⇒ **Deuxième cas** : L'équation caractéristique a une racine double α .
 (E_H) a pour solutions les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{K}$ des fonctions $y_1 : t \rightarrow e^{\alpha t}$ et $y_2 : t \rightarrow te^{\alpha t}$. (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de (E_H) .
- ⇒ **Troisième cas** : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et l'équation caractéristique a deux racines distinctes (et conjuguées) α et β dans $\mathbb{C}$. Soit $\alpha = \lambda + i\omega$ (d'où $\beta = \lambda - i\omega$).
 (E_H) a pour solutions les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{R}$ des fonctions $y_1 : t \rightarrow e^{\lambda t} \cos(\omega t)$ et $y_2 : t \rightarrow e^{\lambda t} \sin(\omega t)$. (y_1, y_2) est un système fondamental.
- ⇒ Lorsque le second membre $c(t)$ est de la forme $P(t)e^{kt}$ (ou une somme de telles fonctions, on appliquera alors le principe de superposition) où P est un polynôme et k une constante. On cherche une solution particulière f de la même forme : $f(t) = Q(t)e^{kt}$ où Q est un polynôme tel que $\deg(Q) = \deg(P) + m$ où m est la multiplicité de k en tant que racine de χ_A ($m = 0$ si k n'est pas racine de χ_A).
- ⇒ Sinon on applique la méthode de variation des constantes à partir du système fondamental (y_1, y_2) déterminé grâce à l'équation caractéristique.

13.4.2.3 Pratique de résolution dans le cas général

On sera amené à résoudre des équations non normalisées en y'' :

$$(E) : \alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta(t)$$

- ⇒ Les solutions $S(E_H)$ de (E_H) constituent un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.
- ⇒ Si y_0 est une solution de (E) , une fonction y est solution de (E) si et seulement si la fonction $y - y_0$ est solution de (E_H) . L'ensemble $S(E)$ des solutions de (E) est donc soit l'ensemble vide, soit un espace affine dirigé par $S(E_H)$.

- ⇒ On ne dispose d'aucun résultat général dans ce cas concernant l'existence de solutions ou, lorsqu'il n'est pas vide, la dimension de l'espace affine $S(E)$. On se place sur des sous intervalles sur lesquels α ne s'annule pas. (E) est alors équivalente à

$$(E') : y'' + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}y' + \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}y = \frac{\delta(t)}{\alpha(t)}$$

On résout l'équation (E') sur chacun de ces sous intervalles et on essaie de raccorder les solutions obtenues.

- ⇒ Si on connaît une solution non nulle y_1 de l'équation homogène normalisée en $y'' : (E'_H) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ (rechercher des polynômes, des séries entières...), on trouvera toutes les solutions de $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ (ou de (E_H)) sur un intervalle où y_1 ne s'annule pas en cherchant les solutions y sous la forme $y(t) = z(t)y_1(t)$. z' sera solution d'une équation du premier ordre.
- ⇒ Si on connaît un système fondamental de solutions (y_1, y_2) de (E'_H) , et si aucune solution particulière y_0 de (E') n'est visible, on en cherche une par la méthode de variation des constantes.