

Programme de Colle - Semaine n° 22

Du 27 mars 2023 au 31 mars 2023

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les élèves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.

Pour le premier groupe, appelé "**Groupe A**", les questions de cours intégreront toutes les questions de cours sauf celles notées "**B**".

Le second groupe, appelé "**Groupe B**", les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B** ou **E3A**.

ATTENTION : deux questions de "cours" seront posées aux élèves des deux groupes : une question (courte ~ 5 min) d'ordre pratique ou un énoncé précis d'un résultat du cours + une question de cours usuelle (Démonstration ou exo Banque CCP) pour chaque élève des deux groupes.

Questions courtes (~ 10 min) d'ordre pratique pour tous les élèves

une isométrie ou une équation différentielle

Reconnaitre l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

1. $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 & -4 & 3 \\ -4 & -3 & 12 \\ 3 & 12 & 4 \end{pmatrix}$

A est la matrice de la réflexion d'axe le plan d'équation $x + 4y - 3z = 0$

2. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

A est la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ (bijection réciproque de la matrice de l'exercice 2)

3. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

A est la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et d'angle $\frac{\pi}{3}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A est la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

Résoudre l'équation différentielle suivante :

1. $y'' + 2y' + y = \operatorname{ch} x$
 $x \mapsto \frac{\operatorname{ch}(x) + x^2 e^{-x}}{4} + (Ax + B)e^{-x}$

2. $x'' + 5x' + 4x = e^{-2t} \sin t$.
 $t \mapsto -\frac{\cos t + 3 \sin t}{10} e^{-2t} + A e^{-t} + B e^{-4t}$

Cours

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

- ⇒ Produit scalaire. Norme euclidienne (ou pré-hilbertienne)
- ⇒ Propriétés : identité de polarisation, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski

Orthogonalité

- ⇒ Famille orthogonale, famille orthonormale
- ⇒ Orthonormalisation de Schmidt
- ⇒ Expressions dans une base orthonormale d'un espace euclidien
- ⇒ Orthogonalité de parties d'un espace pré-hilbertien
- ⇒ Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.
- ⇒ Projections et symétries orthogonales.
- ⇒ Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie

Endomorphismes d'un espace euclidien

Adjoint d'un endomorphisme

- ⇒ Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien
- ⇒ Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien
- ⇒ Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint
- ⇒ Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée.
- ⇒ Si le sous-espace F est stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^*

Isométries vectorielles

- ⇒ Isométrie vectorielle d'un espace euclidien
- ⇒ Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable
- ⇒ Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale
- ⇒ Réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.

Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

- ⇒ Endomorphisme autoadjoint (ou symétrique) d'un espace euclidien
- ⇒ Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs autoadjoints
- ⇒ Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable
- ⇒ Théorème spectral : si u est un endomorphisme autoadjoint, u est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) en base orthonormale.
- ⇒ Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Définition et caractérisation à l'aide du spectre.
- ⇒ Traduction matricielle

Equations différentielles linéaires

Révision des chapitres vus en MPSI

- ⇒ Équation : $y' + a(t)y = b(t)$ avec a et b continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$
- ⇒ Équation : $y'' + ay' + by = c(t)$ avec a et b deux constantes de $\mathbb{K}$ et c combinaison linéaire de fonctions du type : $t \mapsto e^{\alpha t}P(t)$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ et P polynôme.

Equation différentielle linéaire scalaire du premier ordre

- ⇒ Equations résolues en y' : Solutions de l'équation (E_H) , solutions de (E) , théorème de Cauchy.
- ⇒ Equations non résolues en y' : problèmes de raccord.

Equation différentielle linéaire du premier ordre

- ⇒ Théorème de Cauchy (admis).
- ⇒ Solutions de $x' = a(t)(x)$. Système fondamental de solutions
- ⇒ Solutions de $x' = a(t)(x) + b(t)$. Méthode de variation des constantes.
- ⇒ Cas particulier des équations à coefficients constants

Equations différentielles scalaires d'ordre n

- ⇒ Equivalence à un système. Structure de l'ensemble des solutions
- ⇒ Equations différentielles du second ordre résolue en y'' : résolution, méthode de Lagrange, méthode de variation des constantes, cas particulier des équations à coefficients constants
- ⇒ Exemple de résolution de $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$

Calcul différentiel

- ⇒ Dérivée selon un vecteur.
- ⇒ Dérivées partielles
- ⇒ Application différentiable en un point.
- ⇒ Unicité/définition de l'application différentielle en un point en cas de différentiabilité.
- ⇒ Coordonnées de l'application différentielle en un point, gradient (notation $\nabla f(a)$)

Exercices et questions de cours

1. **TOUS** Résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre : $y' + a(t)y = b(t)$

2. **Banque CCP 80**

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- (a) Démontrer que $(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .
- (b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

3. **TOUS Banque CCP 66**

- (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Prouver que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \in [0, +\infty[$
- (b) Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
- (c) Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), AB = BA \implies A^2B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
- (d) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$

4. **TOUS** Résolution de $x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2$ (solution sur un intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$ ou sur $]0, +\infty[$ voire sur $\mathbb{R}$ pour les plus avancés)

5. **TOUS** Résolution de $\begin{cases} x' = 3x - 2y + e^t \\ y' = x + e^t \end{cases}$

6. $x(1 + x^2)y' - (x^2 - 1)y = -2x$

7. Résolution de $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{1 + x^2}$

8. $\begin{cases} x' = 3x - 2y + 2e^t \\ y' = 4x - 3y + e^t \\ z' = -2x + y - 1 \end{cases}$

9. **Banque CCP 31**

- (a) Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.
- (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

10. **TOUS Banque CCP 57**

- (a) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
- i. Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.
- ii. Donner la définition de « f différentiable en $(0, 0)$ ».

(b) On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

- i. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- ii. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

11. **Banque CCP 52** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

- (a) Prouver que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
- (b) i. Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
- ii. Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
- (c) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
- i. Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et les calculer.
- ii. Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ et donner leur valeur.
- iii. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Prochains programmes : Fonctions holomorphes, Formes quadratiques, théorème d'inversion locale, théorie de Galois, probabilités continues etc... pour ceux qui feront des maths, joujou avec ordinateur pour les autres

GROUPE DE COLLES

Groupe B : classés par ordre croissant des groupes de colles

HAMON (2) & HATON (2), DEMOL (4) & VULIN (4), GAUTHERET A. (6) & GUILLARD (6) & LE BRIS (6), DESEINE (8)
GUITTONNY (10) & PELLETIER (10) & RICARD (10), DURAND (12) & GODEREAUX (12)

Groupe A : les autres