Préparation Oral 2023

Recueil Mines/Ponts et Centrale

Algèbre

Exercice 1. 392 rms 2022 MP, Mines Ponts
Soit E un ensemble. Une application p de E dans E est dite idempotente si $p \circ p = p$.

1. Soit p idempotente sur E.
   (a) Montrer que si p est injective, alors $p = id$.
   (b) Montrer que si p est surjective, alors $p = id$.
   (c) Donner une application idempotente sur un ensemble à deux éléments qui n'est pas l'identité.
   (d) Donner trois applications idempotentes sur un ensemble à deux éléments, et dix sur un ensemble à trois éléments.
2. Montrer qu'une application p est idempotente si et seulement si, pour tout $x \in p(E)$, $p(x) = x$.
3. Soit a, b, c trois éléments distincts. Donner les trois applications idempotentes de $\{a, b\}$ et les dix applications idempotentes de $\{a, b, c\}$.
4. On suppose ici que E est un ensemble à n éléments. Dénombrer les applications idempotentes sur E.
   Ind. Utiliser une partition judicieuse de l'ensemble des applications idempotentes de E en s'appuyant sur la question 2

Exercice 2. 393 rms 2022 MP, Mines-Ponts
Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si, pour tout entier $n \geqslant (a-1)(b-1)$, il existe $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ tel que $au + bv = n$

Exercice 3. 394 rms 2022 MP, Mines-Ponts
Soit $E = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$. Montrer qu'il existe une unique bijection g de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ telle que $\forall F \in \mathcal{F}, g(F) \bigcap F = \emptyset$

Exercice 4. 395 rms 2022 MP, Mines-Ponts
Donner les couples (m, n) d'entiers naturels tels que $2^m - 3^n = 1$.

Exercice 5. 396 rms 2022 MP, Mines-Ponts
Soient p, q des entiers $\geqslant 2$.

1. Montrer que si $q^p - 1$ est premier, alors p est premier et $q = 2$.
2. Montrer que si p est premier impair et que k premier[1] divise $(2^p - 1)$ alors $k \equiv 1[2p]$

Exercice 6. 397 rms 2022 MP, Mines-Ponts
Soit $a \geqslant 2$ un entier.

1. On suppose qu'il existe un entier $m \geqslant 2$ tel que $a^m + 1$ soit premier. Montrer que a est pair.
   On prend $a = 2$. Montrer que m est une puissance de 2.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}, F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k$.
3. Si m et n sont deux éléments distincts de $\mathbb{N}$, montrer que $F_m \wedge F_n = 1$.
4. Retrouver le fait que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 7. 403 rms 2022 MP, Mines-Ponts
Saoit A un anneau commutatif.
Un idéal I de A est dit premier lorsque $\forall (a, b) \in A^2, ab \in I \Longrightarrow (a \in I \text{ ou } b \in I)$

1. On suppose $A \neq \{0\}$. Montrer que $\{0\}$ est premier si et seulement si A est intègre.
2. Trouver tous les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$.
3. Soit P irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Montrer que $P\mathbb{K}[X]$ est un idéal premier.
4. Un idéal $I \neq A$ de A est dit maximal lorsqu'on ne peut intercaler d'idéal strictement entre I et A.
   Montrer que $\{0\}$ est un idéal maximal si et seulement si A est un corps.

1. non précisé dans l'énoncé original de la RMS

5. Déterminer les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$.
6. Montrer que tout idéal maximal de A est premier.

Exercice 8. 407 rms 2022 MP, Mines-Ponts
Soit $n \geqslant 3$, $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et scindé à racines simples. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P' + \lambda P$ est scindé à racines simples.

Exercice 9. 408 rms 2022 MP, Mines-Ponts
Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ distincts 2 à 2 et $P = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$.

Calculer, sous réserve d'existence ; $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i)}$ et $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i P'(a_i)}$

Exercice 10. 413 rms 2022 MP, Mines-Ponts
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.
On note $N = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \ker u^k$ et $I = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Im} u^k$

1. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N = \ker u^p$ et $I = \operatorname{Im} u^p$
2. (a) Montrer que $E = N \oplus I$.
   (b) Montrer que N et I sont stables par u.
   (c) Montrer que les endomorphismes induits $u_{||N}$ et $u_{||I}$ sont respectivement nilpotent et bijectif.
3. Réciproquement, on suppose que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E et stables par u, avec $u_{||F}$ nilpotent et $u_{||G}$ bijectif. Montrer que $F = N$ et $G = I$

Exercice 11. 414 rms 2022 MP, Mines-Ponts
Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Décrire l'endomorphisme associé à AB.
2. Montrer que BA est inversible.
3. Que dire des noyaux et des images de A et B ?
4. Calculer BA

Exercice 12. 428 rms 2021 MP, Mines Ponts
On pose $d_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de dérangements de $\{1, 2, \ldots, n\}$, c'est-à-dire le nombre de permutations sans points fixes.

1. Quel est le nombre moyen de points fixes de $\sigma \in S_n$?
2. (a) Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$
   (b) En déduire que : $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
   (c) Montrer que le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ admettant exactement p points fixes est : $\frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}$.
   En déduire que : $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!} = 1$

Exercice 13. 429 rms 2021 MP, Mines Ponts

Quel est le chiffre des unités de $2022^{2022^{2022}}$?

Exercice 14. 430 rms 2021 MP, Mines Ponts
Résoudre dans $\mathbb{Z}$ la congruence : $9x \equiv 6[24]$

Exercice 15. 431 rms 2021 MP, Mines Ponts
Montrer que 2021 a un multiple dont tous les chiffres en base 10 valent 1.

Exercice 16. 432 rms 2021 MP, Mines Ponts
Les groupes $(\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Q},+)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 17. 439 rms 2021 MP, Mines Ponts

1. Quels sont les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$?
2. Quels sont les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$?

Exercice 18. 440 rms 2021 MP, Mines Ponts
Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant, scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P''(x)P(x) - (P'(x))^2 < 0$
2. Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, montrer que : $a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$.

Exercice 19. 445 rms 2021 MP, Mines Ponts
Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts.

1. Montrer que la famille formée des fonctions : $f_k : x \mapsto |x - a_k|$, pour $k \in [\![1, n]\!]$, est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que la famille des polynômes $P_k = \prod_{j \neq k} (X - a_j)$, pour $k \in [\![1, n]\!]$, est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 20. 447 rms 2021 MP, Mines Ponts
Soit $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & y & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & y^2 & 2y & 2 \\ x^3 & 3x^2 & y^3 & 3y^2 & 6y \\ x^4 & 4x^3 & y^4 & 4y^3 & 12y^2 \end{vmatrix}$. Montrer que D est nul si et seulement si $x = y$

Exercice 21. 448 rms 2021 MP, Mines Ponts
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $Q_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & x^2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \binom{p}{1} & \cdots & \binom{p}{p-1} & x^p \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \cdots & \binom{p+1}{p-1} & x^{p+1} \end{vmatrix}$

1. Calculer $Q_p(x+1) - Q_p(x)$ en utilisant la colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (p+1)x^p \end{pmatrix}$
2. Montrer que : $Q_p(n+1) = (p+1)! \sum_{k=1}^{n} k^p$
3. Retrouver la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 22. 450 rms 2021 MP, Mines Ponts
Soit $n \geqslant 2$. Calculer le déterminant de $\Phi : A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto A^{\mathsf{T}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice 23. 453 rms 2021 MP, Mines Ponts
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :
$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P(X+n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, P(X+k)$.

Exercice 24. 454 rms 2021 MP, Mines Ponts
Soit $n \geqslant 2$ un entier.

1. Soit V un sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contenant toutes les matrices nilpotentes. Montrer que V contient une matrice inversible.
2. Montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible.

Exercice 25. 455 rms 2021 MP, Mines Ponts
Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. Un hyperplan de E est défini comme supplémentaire d'une droite vectorielle.

1. Montrer qu'un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement s'il existe $\varphi \in E^*$ non nulle telle que $H = \ker \varphi$.
2. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on note Φ_A la forme linéaire $M \mapsto \operatorname{Tr}(AM)$. Montrer que l'application $\Phi : A \mapsto \Phi_A$ est un isomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual.
3. Montrer que $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 \cdots & 1 & 0 & \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible. Calculer $\operatorname{Tr}(J_r C)$ où J_r est la matrice carrée dont les seuls coefficients non nuls sont les r premiers coefficients diagonaux qui valent 1.
4. En déduire que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Exercice 26. 457 rms 2021 MP, Mines Ponts

1. Caractériser les formes linéaires sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à l'aide de la trace. En déduire les $f \in E^*$ telles que : $f(XY) = f(YX)$ pour tout $(X, Y) \in E^2$.
2. Quels sont les hyperplans rencontrant $Gl_n(\mathbb{C})$?
3. Existe-t-il une base de E constituée de matrices inversibles ?

Exercice 27. 473 rms 2021 MP, Mines Ponts
On considère $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les éléments propres de A.
2. Calculer A^n.
3. Calculer la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, A^k$. Exprimer cette limite à l'aide de A.

Exercice 28. 477 rms 2021 MP, Mines Ponts
Soit, pour $z \in \mathbb{C}$, $M_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. À quelle condition la matrice M_z est-elle diagonalisable ?
2. À quelle condition la suite $\left(M_z^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 29. 467 rms 2019 MP, Mines Ponts
Soit p un nombre premier impair.

1. Dénombrer les carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
2. On suppose $p \equiv 1[4]$. En calculant la classe de $(p-1)!$ modulo p de deux manières différentes, montrer que -1 est un carré modulo p.
3. On suppose que -1 est un carré modulo p. Montrer que $p \equiv 1[4]$

Exercice 30. 468 rms 2019 MP, Mines Ponts

1. Soit φ un isomorphisme du groupe G sur le groupe H. Montrer que x est générateur de G si et seulement si $\varphi(x)$ est générateur de H.
2. Montrer qu'un sous-groupe d'un groupe monogène est monogène.

Exercice 31. 472 rms 2019 MP, Mines Ponts
Soient $z_1, \cdots, z_n$ des nombres complexes deux à deux distincts, $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$.

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(z_k)}{P'(z_k)}$

Exercice 32. 473 rms 2019 MP, Mines Ponts

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$\forall \theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ P_n\left(\dfrac{1}{\tan^2 \theta}\right) = \dfrac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1}\theta}$

2. Préciser le degré et les racines de P_n. Étudier la somme des racines.
3. Montrer que pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{1}{\tan^2\theta} \leqslant \frac{1}{\theta^2} \leqslant 1 + \frac{1}{\tan^2\theta}$
4. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Exercice 33. 482 rms 2019 MP, Mines Ponts

Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E. On suppose que f est inversible et g de rang 1. Montrer que $f+g$ est inversible si et seulement si $\operatorname{tr}\left(g \circ f^{-1}\right) \neq -1$

Exercice 34. 486 rms 2019 MP, Mines Ponts
Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, M est de trace nulle si et seulement si elle est semblable à une matrice à diagonale nulle.

Exercice 35. 494 rms 2019 MP, Mines Ponts
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $(AB)^n = 0$. Montrer que $(BA)^n = 0$

Exercice 36. 495 rms 2019 MP, Mines Ponts
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 37. 496 rms 2019 MP, Mines Ponts
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall (A,t) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+, \det\left(A^2 + t\, I_n\right) \geqslant 0$
2. On suppose $n \in \mathbb{N}^*$ impair. Montrer que $-I_n$ n'est pas somme de deux carrés de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 38. 497 rms 2019 MP, Mines Ponts
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$, soit $f(P) = \left(X^2-1\right)P' - 2nXP$. Montrer que f est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ et déterminer ses éléments propres.

Exercice 39. 498 rms 2019 MP, Mines Ponts
Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathfrak{L}(E)$ tel que f^2 soit un projecteur.
1. Montrer que f est trigonalisable.
2. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}\left(f^2\right)$.

Exercice 40. 503 rms 2019 MP, Mines Ponts
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
1. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A
2. Déterminer les $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$

Exercice 41. 506 rms 2019 MP, Mines Ponts
Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^{-1} & I_n \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 42. 507 rms 2019 MP, Mines Ponts
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 43. 510 rms 2019 MP, Mines Ponts
Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, déterminer le spectre de la comatrice de A

Exercice 44. 512 rms 2019 MP, Mines Ponts
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant même polynôme minimal et même polynôme caractéristique. Les matrices A et B sont-elles semblables ?

Exercice 45. 515 rms 2019 MP, Mines Ponts
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \middle| A^3 + A = 10 I_n\right\}$. Déterminer l'image de E_n par det.

Exercice 46. 517 rms 2019 MP, Mines Ponts
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Calculer e^A si $A^3 = A^2$.
2. Calculer e^A si $A^4 + A^3 - 2A^2 = 0$

Exercice 47. 518 rms 2019 MP, Mines Ponts
Soient $a \in]0,1[$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & a \\ 1-a & a & 0 \end{pmatrix}$. Étudier la convergence de la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 48. 520 rms 2019 MP, Mines Ponts
Soient E un espace euclidien, a et b deux vecteurs non nuls de E. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, soit $f(x) = \dfrac{\langle x, a\rangle \langle x, b\rangle}{\|x\|^2}$.

Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de f.

Exercice 49. 524 rms 2019 MP, Mines Ponts
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M = -{}^tM$ si et seulement si $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXMX = 0$.

Exercice 50. 947 rms 2019 MP, Centrale
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $\mathrm{Com}(M)$ la comatrice de M

1. Soit $r \in \{0, \ldots, n\}$. Déterminer la comatrice de J_r^n, la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant r coefficients égaux à 1 puis uniquement des coefficients nuls sur la diagonale.
2. Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B)$.
3. Pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, quel est le rang de $\mathrm{Com}(M)$?
4. L'application Com est-elle injective ? Quelle est son image ?

Exercice 51. 949 rms 2019 MP, Centrale
Soient $n \geqslant 2$ un entier et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $d_n(\mathbb{K})$ la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.

1. Que dire du spectre réel d'une matrice antisymétrique réelle ? Dans le cas où n est impair, peut-on être plus précis ?
2. Déterminer $d_n(\mathbb{R})$
3. Déterminer $d_2(\mathbb{C})$

Exercice 52. 952 rms 2019 MP, Centrale
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $m_{i,j} = i$ si $j = i+1$, $m_{i,j} = n-i+1$ si $j = i-1$, $m_{i,j} = 0$ sinon.

1. Dessiner M
2. Déterminer l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dont M est la matrice dans la base canonique.
3. Déterminer le rang de M et son spectre.

Exercice 53. 954 rms 2019 MP, Centrale
Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice de nilpotence d.
   (a) Montrer que $d \leqslant n$
   (b) Montrer que $M^2 - I_n$ est inversible, formuler son inverse.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0$
   (a) Montrer que $\left|\mathrm{tr}(M)\right| \leqslant n$.
   (b) Etudier le cas d'égalité.
   (c) Etudier le cas $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 54. 956 rms 2019 MP, Centrale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{Tr}\left(A^k\right) = \mathrm{Tr}\left(B^k\right)$

1. A et B sont-elles semblables ?
2. Montrer que $\chi_A = \chi_B$.

Analyse

Exercice 55. 523 rms 2021 MP, Mines Ponts
Existe-t-il une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) = N(A)N(B)$?

Exercice 56. 527 rms 2021 MP, Mines Ponts
Soit $E = \left\{f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R}) \middle| f(0) = f'(0) = 0\right\}$. Si $f \in E$, on pose $N(f) = \left\|f + 2f' + f''\right\|_\infty$.

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. On fixe $f \in E$ et on pose $g = f + 2f' + f''$. Exprimer f en fonction de g.
3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $f \in E$, $\left\|f\right\|_\infty \leqslant aN(f)$.
4. Les normes $\left\| \ \right\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 57. 528 rms 2021 MP, Mines Ponts

1. On munit $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ de la norme de convergence uniforme. Soit Φ qui à $f \in E$ associe $\exp(f)$. La fonction Φ est-elle continue ?
2. Soit N qui à $f \in E$ associe $\sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 \, dt}$.
   (a) Montrer que N est une norme sur E.
   (b) Comparer N et la norme de convergence uniforme.

Exercice 58. 529 rms 2021 MP, Mines Ponts
Soit $E = \left\{f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \middle| f(0) = 0\right\}$. Pour $f \in E$, on pose $n(f) = \left\|f\right\|_\infty + \left\|_\infty f'\right\|_\infty$ et $N(f) = \left\|f + f'\right\|_\infty$.

1. Montrer que n et N sont des normes sur E.
2. Montrer qu'elles sont équivalentes.

Exercice 59. 535 rms 2021 MP, Mines Ponts
Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) = n \ln(n) + an + b + o(1)$

Exercice 60. 537 rms 2021 MP, Mines Ponts
Étudier la convergence de la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$

Exercice 61. 544 rms 2021 MP, Mines Ponts
On pose, pour tout $n \geqslant 2$, $P_n = X(X-1)\cdots(X-n)$.

1. Montrer que P_n' s'annule en un unique $r_n \in]0,1[$.
2. Trouver un équivalent de r_n

Exercice 62. 545 bis rms 2021 MP, Mines Ponts
Soient $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Donner un équivalent de u_n

Exercice 63. 551 rms 2021 MP, Mines Ponts
Nature des séries de terme général $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ et $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$

Exercice 64. 552 rms 2021 MP, Mines Ponts
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Nature de la série de terme général $\displaystyle\int_n^{2n} \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

Exercice 65. 569 rms 2021 MP, Mines Ponts
Étudier et tracer le graphe de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$

Exercice 66. 570 rms 2021 MP, Mines Ponts
Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_x^{2x} \frac{\sin^m t}{t^n} \, dt$

Exercice 67. 571 rms 2021 MP, Mines Ponts

Soit $F : x \in]1, +\infty[\longmapsto \displaystyle\int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^t}{t}\, dt$. Déterminer la limite de F en 1^+. Montrer que F est injective.

Exercice 68. 576 rms 2021 MP, Mines Ponts

Soient f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle[2] que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt = 0$ et, pour $x \in]0,1]$, $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f$.

1. Montrer que F se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 F^2 = 2\int_0^1 fF$
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 F^2 \leqslant 4\int_0^1 f^2$

Exercice 69. 581 rms 2021 MP, Mines Ponts

Convergence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arcsin\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$

Exercice 70. 596 rms 2021 MP, Mines Ponts

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f(1)$.
2. Exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$ et de x.
3. Déterminer un équivalent de f en 0^+.
4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
5. Déterminer la limite et un équivalent de f en $+\infty$

Exercice 71. 597 rms 2021 MP, Mines Ponts

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f(1)$.
2. Exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$ et de x.
3. Déterminer un équivalent de f en 0^+.
4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
5. Déterminer la limite et un équivalent de f en $+\infty$

Exercice 72. 605 rms 2021 MP, Mines Ponts

1. Rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{(k+1)(k+2)}{2^k} x^k$?
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2^k}$

Exercice 73. 606 rms 2021 MP, Mines Ponts

Montrer que, pour tout $x \in [-1,1]$, $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

Exercice 74. 617 rms 2021 MP, Mines Ponts

Soit $f \in \mathscr{C}^0\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\right)$ bornée. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} f(0)$

Exercice 75. 622 rms 2021 MP, Mines Ponts

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(x+t)}{1+t^2}\, dt$

Exercice 76. 625 rms 2021 MP, Mines Ponts

Déterminer le domaine de définition et calculer $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^x}}$

2. Cette condition n'apparaissait pas dans l'énoncé original

Exercice 77. 627 rms 2021 MP, Mines Ponts

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\, e^{-t}\, dt$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et paire.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$. Calculer f'' et en déduire une expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 78. 631 rms 2021 MP, Mines Ponts

Soit $I : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t-x/t}}{\sqrt{t}}\, dt$.

1. Montrer que la fonction I est définie sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que I est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie l'équation différentielle $(E) : 2xy'' + y' - 2y = 0$.
3. On pose $y(x) = z(\sqrt{x})$. Résoudre (E).
4. Donner l'expression de $I(x)$.

Exercice 79. 640 rms 2021 MP, Mines Ponts

On recherche le minimum de la fonction $f : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \left|t^2 + at + b\right|\, dt$.

1. Déterminer le minimum de la fonction $b \mapsto f(0,b)$ et la valeur de b en laquelle il est atteint.
2. Soit $b \in \mathbb{R}$. On considère maintenant la fonction $a \mapsto f(a,b)$. Montrer qu'elle est paire et convexe. En déduire son minimum et le point où il est atteint.
3. Déterminer le minimum de f. En quel(s) point(s) de $\mathbb{R}^2$ est-il atteint ?

Exercice 80. 537 rms 2019 MP, Mines Ponts

Soit C une partie convexe d'un espace normé. Montrer que l'adhérence et l'intérieur de C sont convexes

Exercice 81. 539 rms 2019 MP, Mines Ponts

Soient C une partie convexe d'un espace normé réel E, D une partie de E telle que $C \subset D \subset \overline{C}$. Montrer que D est connexe par arcs.

Exercice 82. 543 rms 2019 MP, Mines Ponts

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que, pour $n = 2$ et $n = 3$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Que dire pour n quelconque ?

Exercice 83. 544 rms 2019 MP, Mines Ponts

Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé réel, K un compact non vide de E, f une application de K dans K telle que : $\forall (x,y) \in K^2, x \neq y \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe, que l'on note x.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Exercice 84. 545 rms 2019 MP, Mines Ponts

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$. Donner un équivalent de $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sigma(k)$

Exercice 85. 549 rms 2019 MP, Mines Ponts

Étudier la convergence de la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1-u_n^2}{1+u_n^2}$

Exercice 86. 550 rms 2019 MP, Mines Ponts

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \dfrac{1+u_n}{2+u_n}$.

Montrer que $u_n \longrightarrow 0$; étudier le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 87. 551 rms 2019 MP, Mines Ponts

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ selon la valeur de u_0.
2. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 sans stationner. Trouver un équivalent de u_n.

Exercice 88. 964 rms 2019 MP, Centrale

Soient E et F deux espaces normés réels de dimension finie, f une application continue de E dans F.
On dit que f est propre si, pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E.

1. On suppose que f est propre. Montrer que l'image par f d'un fermé de E est un fermé de F.
2. Montrer que f est propre si et seulement si $\left\|f(x)\right\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Exercice 89. 968 rms 2019 MP, Centrale

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2$.

On suppose que $a_n\, S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

1. Montrer que $\sum a_k^2$ diverge.
2. Donner un équivalent de a_n

Exercice 90. 969 rms 2019 MP, Centrale

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2. Déduire de la question précédente la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$
3. On pose, pour $s > 1$, $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n}$

Exercice 91. 1048 rms 2019 PC, Centrale

Soit $H = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \middle| \mathrm{Tr}(M) = 0\right\}$.

1. Montrer que H est un espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.
2. Montrer que toute matrice de H est semblable à une matrice de diagonale nulle.
3. Montrer que toute matrice de H peut s'écrire $AB - BA$ avec A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 92. 1049 rms 2019 PC, Centrale

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 93. 1050 rms 2019 PC, Centrale

1. L'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est-il un sous-espace vectoriel ?
2. Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes.

Exercice 94. 1059 rms 2019 PC, Centrale

Si $T = X + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} t_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$, on pose $\mathcal{F}_T = (P_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ où P_k est le reste de la division euclidienne de T^k par X^{n+1}

1. On pose $T_1 = X + X^2$ et $T_2 = X + 2X^2 + X^3$. déterminer $\mathcal{F}_{T_1}$ et $\mathcal{F}_{T_2}$.
2. Soit $V_n = \left\{R \in \mathbb{C}_n[X] \,\middle|\, R(0) = 0\right\}$. Montrer que V_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$; préciser sa dimension.
3. Soit $T = X + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} t_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $\mathcal{F}_T = (P_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base de V_n

Probabilités

Exercice 95. ups 2022 MP, Centrale

Cinq personnes, placées sur les sommets d'un pentagone régulier, jouent à s'envoyer des frisbees. Ils ont deux frisbees, situés au départ sur des sommets adjacents. À chaque étape du jeu, chaque personne qui est en possession d'un frisbee l'envoie à un de ces deux voisins. Le jeu s'arrête quand une même personne reçoit les deux frisbees. Trouver l'espérance et la variance de la durée du jeu (en nombre d'étapes). Trouver une expression, en fonction des nombres de Fibonacci, pour la probabilité que le jeu dure plus de 100 étapes

Exercice 96. 653 rms 2021 MP, Mines Ponts
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$, et $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Soit Z la variable aléatoire telle que $Z(\omega) = X(\omega)$ si $Y(\omega) \leqslant m$ et $Z(\omega) = Y(\omega)$ sinon.

1. Déterminer la loi de Z. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.
2. Déterminer les entiers m qui maximisent l'espérance de Z.

Exercice 97. 654 rms 2021 MP, Mines Ponts
Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois géométriques de paramètres p_1 et p_2. Calculer les espérances de $\min(X_1, X_2)$ et $\max(X_1, X_2)$.

Exercice 98. 655 rms 2021 MP, Mines Ponts
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que $\mathbb{E}\left(\dfrac{X}{Y}\right) \geqslant 1$.

Exercice 99. 662 rms 2021 MP, Mines Ponts

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}\left(\dfrac{2}{3}\right)$.
Soit $T = \min\left\{k \geqslant 2 \middle| X_k = X_{k-1} = 1\right\}$.
Calculer l'espérance de T

Exercice 100. 668 rms 2021 MP, Mines Ponts
Une urne contient n boules identiques numérotées de 1 à n. On effectue des tirages. Après chaque tirage, on enlève les boules qui ont un numéro supérieur ou égal à celui de la boule tirée. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

1. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.
2. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$.
3. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$

Exercice 101. 982 rms 2019 MP, Centrale
Soit $s \in]1, +\infty[$ et X une variable aléatoire d'image $\mathbb{N}^*$ suivant la loi $\zeta(s)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{\zeta(s)\, n^s}$, où on note $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(n|X)$
2. Soient $n_1, \ldots, n_k$ des nombres deux à deux premiers entre eux. Montrer que les événements $\left(n_j \middle| X\right)_{1\leqslant j\leqslant k}$ sont mutuellement indépendants.
3. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers rangée dans l'ordre croissant. Montrer que : $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - 1/p_n^s} = \zeta(s)$.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ diverge

Recueil CCINP, IMT, Autres écoles

Algèbre

Exercice 102. 1272 rms 2022 MP, Saint Cyr. Avec Python

1. Coder une fonction `PremierDiviseur` qui retourne pour $n \geqslant 2$ son plus petit diviseur premier.
2. Soient $n \geqslant 2$ et p un diviseur premier de n. On rappelle que φ désigne l'indicatrice d'Euler. Montrer que si p^2 divise n, alors $\varphi(n) = p\,\varphi(n/p)$, sinon $\varphi(n) = (p-1)\varphi(n/p)$
3. En déduire une fonction récursive en Python qui calcule $\varphi(n)$

Exercice 103. 1273 rms 2022 MP, IMT

1. Le groupe $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^\times$ est-il cyclique ?
2. Le groupe $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ est-il cyclique ?
3. Soient des entiers $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ premiers entre eux. Montrer que $(\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z})$ et $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ sont isomorphes

Exercice 104. 1274 rms 2022 MP, IMT
Soit $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} + \cdots - a_0$ avec $a_0 > 0$ et $a_1, \ldots, a_{n-1}$ réels positifs.

1. Montrer que P admet une unique racine sur $\mathbb{R}^+$, que l'on note ρ.
2. Soit z une racine complexe de P. Montrer que $|z| \leqslant \rho$.
3. Montrer que $\rho \leqslant \max(1, a_0 + \cdots + a_{n-1})$
4. Montrer que $\rho \leqslant 1 + \max(a_0, \cdots, a_{n-1})$

Exercice 105. 1275 rms 2022 MP, CCINP
Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note $P_i = (X-a)^i$.

1. Montrer que $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto (X-a)\left(P'(X) - P'(a)\right) - 2\left(P(X) - P(a)\right)$. Montrer que f est un endomorphisme. Trouver son noyau et son image.

Exercice 106. 1276 rms 2022 MP, CCINP
Calculer les dimensions de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, sous-espaces des matrices antisymétriques et symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
En déduire le déterminant de l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $u(M) = M^\top$

Exercice 107. 1277 rms 2022 MP, IMT
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.

1. A-t-on nécessairement $BA = 0$?
2. Montrer que $\operatorname{tr}((A+B)^p) = \operatorname{tr}(A^p) + \operatorname{tr}(B^p)$ pour tout $p \geqslant 1$
3. Déterminer une relation entre $\operatorname{rg}(A)$ et $\operatorname{rg}(B)$.

Exercice 108. 1278 rms 2022 MP, Saint Cyr
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $\operatorname{rg}(B) = 1$.
Montrer que $\det(A+B)\det(A-B) \leqslant (\det(A))^2$

Exercice 109. 1279 rms 2022 MP, IMT
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose A inversible, B nilpotente et $AB = BA$. Montrer que $A - B$ et $A + B$ sont inversibles.

Exercice 110. 1280 rms 2022 MP, CCINP

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $ab > 0$ ou $a = b = 0$
2. Soit n pair et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer un espace de dimension 2 stable par A. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_1, \ldots, a_n)$ pour que A soit diagonalisable.

Exercice 111. 1281 rms 2022 MP, CCINP
Soient $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On pose $A = U\,V^\top$ et $a = \operatorname{Tr}(A)$.

1. Que vaut le rang de A ?

2. Calculer $V^\top U$ et A^2.
3. La matrice A est-elle diagnalisable ?
4. On suppose $a \neq 0$. Déterminer les sous-espaces propres de A.

Exercice 112. 1282 rms 2022 MP, Navale
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, (x_0, y_0) une famille libre, u et v deux formes linéaires sur E et $f : x \longmapsto u(x)\, x_0 + v(x) y_0$. Déterminer les éléments propres de f.

Exercice 113. 1283 rms 2022 MP, IMT
Soient u et v deux endomorphismes de E où E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension quelconque.

1. Montrer que, si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de $u \circ v$, alors c'est aussi une valeur propre de $v \circ u$.
2. Ici $E = \mathbb{R}[X], u(P) = P'$ et $v(P) = \displaystyle\int_0^X P$. Calculer $\ker(u \circ v)$ et $\ker(v \circ u)$. Qu'en déduire ?
3. Montrer que le résultat de la première question est aussi valable pour $\lambda = 0$ lorsque E est de dimension finie.

Exercice 114. 1284 rms 2022 MP, CCINP
Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux valent a et les autres coefficients b.

1. Calculer le polynome caractéristique de a.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Que vaut le polynome minimal de A ?

Exercice 115. 1285 rms 2022 MP, CCINP
Soit $n \geqslant 2$. On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i = 1$ ou $j = 1$, et $a_{i,j} = 0$ sinon.

1. Est-ce que A est diagonalisable ?
2. Déterminer les éléments propres de A.
3. Calculer le déterminant de A.

Exercice 116. 1286 rms 2022 MP, CCINP
Une matrice $a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsque tous ses coefficients sont positifs et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
On fixe une telle matrice A.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. On considère la norme infinie standard $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{C}^n$. Montrer que $\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathbb{C}^n$.
3. En déduire que $|\lambda| \leqslant 1$ pour toute valeur propre λ de A.
4. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est convexe et stable par produit matriciel.

Exercice 117. 1287 rms 2022 MP, IMT
Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Soit F l'ensemble des $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont X est vecteur propre. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; quelle est sa dimension ?
2. Même question avec X vecteur quelconque non nul.

Exercice 118. 1288 rms 2022 MP, IMT
Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}_n[X]$ l'application donnée par : $P \longmapsto P(1)\left(X^2 + X\right) + P(-1)\left(X^2 - X\right)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme. Quels sont son noyau et son image ?
2. Étudier ses éléments propres et sa dsiagonalisabilité.

Exercice 119. 1289 rms 2022 MP, ENSEA
Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\int_0^1 t^i P(t)\, dt \right) X^i$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_n[X]\right)$.
2. Soit $P \in \ker(f)$. Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\, dt = 0$. En déduire que $\ker(f) = \{0\}$.

3. Matrice de f dans la base canonique ? Est-elle inversible ? diagonalisable ?
4. Donner un développement à deux termes de $\mathrm{tr}(f)$.

Exercice 120. 1290 rms 2022 MP, CCINP
Soit $n \geqslant 2, E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $\dim(\ker(\mathrm{tr}))$.
   (c) Montrer que $\ker(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}\,(I_n)$
2. Soit $f : M \in E \longmapsto M + \mathrm{tr}(M) I_n$. Montrer que f est diagonalisable.
3. Soit J une matrice non nulle et de trace nulle. On note $g : M \in E \longmapsto M + \mathrm{tr}(M) J$. Montrer que $P = X^2 - 2X + 1$ est un polynome annulateur de g. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

Exercice 121. 1291 rms 2022 MP, CCINP
Le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 3, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0, f^3 = 0$.
Montrer que dans une certaine base de E la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 122. 1292 rms 2022 MP, CCINP
Soit $M = CL$ où $C = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}^\top$ et $L = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$. Selon que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, étudier la diagonalisabilité de M.

Exercice 123. 1293 rms 2022 MP, CCINP
Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Donner un exemple d'endomorphisme pour lequel noyau et image ne sont pas supplémentaires.
2. Montrer que si f est diagonalisable, $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires. Que dire de la réciproque ?
3. (a) Montrer que la suite $\left(\dim\left(\ker f^k\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant k_0, \ker f^k = \ker f^{k_0}$.
   (c) Montrer que $\ker f^{k_0}$ et $\mathrm{Im}\, f^{k_0}$ sont supplémentaires.

Exercice 124. 1294 rms 2022 MP, CCINP
On dit qu'une matrice M est dite circulante si il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que :
$M = M\left(a_0, \dots, a_{n-1}\right) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices circulantes.

1. Soit $J = M(0, 1, 0 \dots, 0)$. Déterminer les éléments propres de J
2. Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M\left(a_0, \dots, a_{n-1}\right) = P(J)$.
   La matrice $M\left(a_0, \dots, a_{n-1}\right)$ est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que $\mathcal{T}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donner sa dimension.

Exercice 125. 1111 rms 2021 MP, CCINP
Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension $n, u \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes.
Déterminer le nombre de $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $v^2 = u$.

Exercice 126. 1112 rms 2021 MP, CCINP
Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X], (P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$. En déduire que si P annule u alors, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X], P \times Q$ annule u.
2. Calculer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que $X^4 + 2X^3 - X^2 + 6X$ annule A.

Exercice 127. 1113 rms 2021 MP,

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie[3]. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, v_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k$.

3. non précisé dans l'énoncé original de la RMS

1. Soit $x \in \operatorname{Ker}(u - id)$. Déterminer la limite de $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Soit $x \in \operatorname{Im}(u - id)$. Déterminer la limite de $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker}(u - id) \oplus \operatorname{Im}(u - id) = E$.
4. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le projecteur sur $\operatorname{Ker}(u - id)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(u - id)$.

Exercice 128. 1114 rms 2021 MP, CCINP
Soient $(E, \langle,\rangle)$, un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ antisymétrique c'est-à-dire tel que, pour tous $x, y \in E, \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.

1. Montrer que, pour tout $x \in E, \langle f(x), x\rangle = 0$ et $\langle f^2(x), x\rangle \leqslant 0$.
2. Soit e une base orthonormée de E. Que peut-on dire de la matrice A de f dans e.
3. En calculant $\det\left(A^\top\right)$, montrer que si f est inversible alors la dimension de E est paire.
4. Montrer que f^2 est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^-$.

Exercice 129. 1124 rms 2021 PSI, IMT
Soient $m, a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre le système $\begin{cases} mx + my + mz + t = a \\ x + my + z + mt = b \end{cases}$

Exercice 130. 1125 rms 2021 PSI, ENSEA
Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 131. 1126 rms 2021 PSI, CCINP
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4 .

1. Soit u un endomorphisme de E tel que $rg(u) = 2$ et $u^2 = 0$.
   (a) Montrer que $\ker(u) = \operatorname{Im}(u)$.
   (b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Soit u un endomorphisme de E tel que $rg(u) = 3$ et $u^4 = 0$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Ker}\left(u^2\right) = \operatorname{Im}\left(u^2\right)$.
   (b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 132. 169-I odlt 00/01 MP, ENSAI
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
Donner une CNS sur A pour que B soit diagonalisable

Exercice 133. 169-II odlt 00/01 MP, ENSAI
Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 134. 171-I odlt 00/01 MP, ENSAI
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = 0$ et $u + v$ est inversible.
Calculer $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$

Exercice 135. 171-II odlt 00/01 MP, ENSAI
Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes et u l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $u(M) = AM$.
Cacluler le déterminant de u (on pourra commencer par le cas où A est diagonalisable).

Exercice 136. 1127 rms 2019 MP, TPE
Un nombre complexe α est dit algébrique lorsqu'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers.
Soit α un nombre algébrique.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Pi \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire et irréductible sur $\mathbb{Q}$, tel que $\Pi(\alpha) = 0$. On note d le degré de Π.
2. On pose $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha] = \{P(\alpha) \,|\, P \in \mathbb{Q}_{d-1}[X]\}$ et $\mathbb{Q}[\alpha] = \{P(\alpha) \,|\, P \in \mathbb{Q}[X]\}$.
   Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}_{d-1}[\alpha]$.
3. Montrer que $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha]$ est un corps.

Exercice 137. 1128 rms 2019 MP, IMT
Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si m divise n, alors $X^m - 1$ divise $X^n - 1$. Étudier la réciproque.

Exercice 138. 1129 rms 2019 MP, IMT
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que P' est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.
2. Comparer les moyennes arithmétiques des racines de P et P'

Exercice 139. 1132 rms 2019 MP, CCINP
Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de rang r. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant de $id_E + \lambda p$.
2. Soit $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $B = {}^tA\,A$. Calculer le rang de B.
3. La matrice B est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et ses espaces propres.

Exercice 140. 1133 rms 2019 MP, CCINP
Soient $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right) \setminus \{0\}$ tel que $u^3 + u = 0$ et A la matrice canonique de u.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
2. Déterminer le rang de u.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.
4. En utilisant le lemme des noyaux, montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(u) \oplus \ker\left(u^2 + Id\right)$.
5. Montrer que : $\operatorname{Im}(u) = \ker\left(u^2 + Id\right)$.
6. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 141. 1134 rms 2019 MP, IMT
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 - 2A$ soit diagonalisable et que 1 ne soit pas valeur propre de A. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 142. 1135 rms 2019 MP, CCINP
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a et b dans $\mathbb{C}$, M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les termes diagonaux (resp. non diagonaux) valent a (resp. b).

1. Calculer le polynôme caractéristique de M.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Calculer le polynôme minimal de M.
4. Calculer le déterminant de $I_n + M$.

Exercice 143. 1136 rms 2019 MP, CCINP
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + 2\,{}^tM$

1. Donner les valeurs et les espaces propres de f.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Calculer sa trace et son déterminant.

Exercice 144. 1137 rms 2019 MP, CCINP
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Trouver un poynôme annulateur P de A.
2. Si $k \in \mathbb{N}$, effectuer la division euclidienne de X^k par P. En déduire A^k.

3. On définit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $X_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = A\,X_k$. Calculer X_k pour $k \in \mathbb{N}$

Exercice 145. 1138 rms 2019 MP, CCINP

1. Localiser les racines de $P = X^3 - X - 1$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la limite de $\chi_A(x)$ en $+\infty$. Que vaut $\chi_A(0)$?
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 146. 1141 rms 2019 MP, CCINP
Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, D la droite engendrée par $u = \sum_{k=1}^{n} k\,e_k$

1. Donner la matrice du projecteur orthogonal p sur D dans la base e.
2. Donner le polynôme caractéristique et le spectre de p.
3. Calculer la distance de $v = \sum_{k=1}^{n} e_k$ à D.

Exercice 147. 1142 rms 2019 MP, CCINP

1. Soit E l'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
   Montrer qu'en posant, pour $(f, g) \in E^2$, $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f\,g$, on définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer $\inf \left\{ \int_{-1}^{1} \left(e^t - at - b\right)^2 dt \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Analyse

Exercice 148. 1115 rms 2021 MP, CCINP

1. Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles. On suppose $u_n \sim v_n$. Montrer que, à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.
2. Déterminer le signe de $\mathrm{sh}(1/n) - (1/n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 149. 1116 rms 2021 MP, IMT
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$. Déterminer en fonction de a, b, c la nature de $\sum u_n$.

Exercice 150. 1117 rms 2021 MP,
Soit $f : x \mapsto e^{2x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

1. Donner les dérivées n-ièmes de f et de g.
2. Déterminer la dérivée n-ième de $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{1+x}$.

Exercice 151. 1118 rms 2021 MP, IMT
Soit $F : \alpha \mapsto \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{1+\alpha}}$. Déterminer les limites de F en 0^+et en $+\infty$.

Exercice 152. 1119 rms 2021 MP, CCINP
Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

1. Étudier la convergence simple et la convergence normale de cette série de fonctions.
2. Soit $A > 0$. Montrer l'existence de M tel que : $\forall x \in [0, A]$, $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{xe^{-kx}}{\ln(k)}\right| \leqslant \dfrac{M}{\ln(n)}$. Que peut-on en déduire ?
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+^*}$.

4. Montrer que, pour $n \geqslant 2$ et $x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x} \geqslant \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{e^{-kx}}{\ln(k)}$. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

Exercice 153. 1120 rms 2021 MP,
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin(t)}{t} dt$.

1. Montrer que $f(0)$ existe.
2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$. On admet que f est continue en 0.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$?
4. Déterminer f sur $\mathbb{R}^{+^*}$.
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Exercice 154. 1121 rms 2021 MP, CCINP
Soit (E) l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$.

1. Justifier l'existence d'une unique solution J_0 de (E) développable en série entière au voisinage de l'origine et telle que $J_0(0) = 1$.
2. Montrer que $J_0 : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n}(t)dt$. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et de n. En déduire une expression de I_n en fonction de n.
4. Montrer que $J_0 : x \mapsto \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin t)dt$

Exercice 155. 1122 rms 2021 MP, CCINP

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier la diagonalisabilité de A. Donner une base de vecteurs propres.
2. Résoudre le système différentiel $(x' = x + 2z, y' = y, z' = 2x + z)$.

Exercice 156. 1175 rms 2021 PSI, CCINP
On considère l'équation différentielle $(E) : \left(x^2 - 1\right) y'' + 2xy' - 2y = 0$.

1. Déterminer les solutions polynomiales de (E).
2. Trouver une équation différentielle (E^*) vérifiée par $x \mapsto z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$.
3. Chercher a, b et c tels que $\dfrac{2 - 4x^2}{x\left(x^2 - 1\right)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x - 1} + \dfrac{c}{x + 1}$.
4. Résoudre (E^*) ; en déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 157. 1176 rms 2021 PSI, CCINP
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
3. Donner les solutions du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y. \end{cases}$

Exercice 158. 1178 rms 2021 PSI, CCINP
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si$(x, y) \neq (0, 0), f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que f est continue.
2. Exprimer les dérivées partielles de f.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Qu'en déduire ?

Exercice 159. 1147 rms 2019 MP, IMT
Pour $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, soit $N(f) = \sup \left\{ \left| \int_0^1 t^n f(t)\,dt \right| \; ; \; n \in \mathbb{N} \right\}$. Montrer que N est une norme sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

Exercice 160. 1149 rms 2019 MP, CCINP
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n\, e^{-u_n}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Énoncer et redémontrer le théorème de sommation des relations de comparaison pour les sommes partielles dans le cas divergent positif.
3. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$. En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 161. 1150 rms 2019 MP, Saint-Cyr
Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$. Déterminer la nature de $\sum u_n$. Déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Exercice 162. 1152 rms 2019 MP, IMT
Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$, $n \geqslant 2$

Exercice 163. 1154 rms 2019 MP, CCINP
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n(x) = \dfrac{1}{(n+x)^{\frac{3}{2}} + (n+x)^{\frac{1}{2}}}$. On note f la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

1. Montrer que f est bien définie sur $]-1,+\infty[$.
2. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$
3. Trouver un équivalent de f en -1 et montrer que f est intégrable sur $]-1,0]$.
4. Trouver la limite de f en $+\infty$.
5. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x^b}$

Exercice 164. 1165 rms 2019 MP, CCINP
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto \dfrac{2x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note f la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pi$. *Indication : on pourra considérer* $t \mapsto \dfrac{2x}{t^2+x^2}$

Exercice 165. 1166 rms 2019 MP, CCINP
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+n^2x}$. On note f la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Donner un équivalent de f en 0

Exercice 166. 1167 rms 2019 MP, IMT
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$

1. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 167. 1170 rms 2019 MP, Navale
Soient, si $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ et $G(x) = \int_0^1 \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$

1. Exprimer G en fonction de F.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 168. 1171 rms 2019 MP, CCINP

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases}$

Exercice 169. 1174 rms 2019 MP, TPE

Trouver les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x$

Exercice 170. 1176 rms 2019 MP, TPE

La fonction f est définie sur $[0,1]^2$ par $f(1,1) = 0$ et $f(x,y) = \dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$ pour $(x,y) \neq (1,1)$.

1. Montrer que f est continue.
2. Déterminer le maximum de f

Exercice 171. 170-I odlt 00/01 MP, ENSAI

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in]0, 2\pi[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin \dfrac{u_n}{2}$

1. Déterminer la limite de u_n
2. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{A}{2^n}$
3. Déterminer un équivalent de $u_n - A$

Exercice 172. 170-II odlt 00/01 MP, ENSAI

Soit F l'ensemble des applications f de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$, continues, positives et telles que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\ dt = 1$.

Étudier les extremums sur F de la fonction $\varphi : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f^3(t)\ dt$

Exercice 173. 170-III odlt 00/01 MP, ENSAI

Rayon de convergence de la série entière $\sum d_n x^n$ où d_n est le nombre de diviseurs de n.

Exercice 174. 170-IV odlt 00/01 MP, ENSAI

Équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$, de $v_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k!}{\ln k}$

Exercice 175. 172 odlt 00/01 MP, ENSAI

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$
3. Préciser un équivalent de f en $+\infty$

Probabilités

Exercice 176. 1123 rms 2021 MP, CCINP

1. Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^\star$.
   On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{p}{n}\mathbb{P}(X = n-1)$. Déterminer la loi de X.
2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   (a) Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X_1}\right)$.
   (b) Donner la loi de $X_1 + X_2$.
   (c) Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$. Préciser l'espérance et la variance.
3. Soient X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
   On pose $U = X_1 + X_2$ et $V = X_2 + X_3$. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de (U, V).

Exercice 177. 1182 rms 2021 PSI, CCINP

On dispose d'une urne qui contient trois jetons numérotés $1, 2, 3$, et dans laquelle on effectue des tirages avec remise. Soient Y la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un chiffre différent du premier chiffre obtenu et Z la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un troisième chiffre.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Quelle est la loi de $Y-1$? En déduire l'espérance et la variance de Y.
3. Déterminer la loi de (Y,Z).
4. En déduire la loi de Z.

Exercice 178. 1184 rms 2021 PSI,

1. Soient $c \in \mathbb{R}^+$et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{c}{k(k+1)}$.
   Trouver a, b tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.
   En déduire la valeur de la constante c.
2. Jacques et Isabelle jouent à un jeu. Si X prend une valeur paire k, Isabelle donne k euros à Jacques ; si X prend une valeur impaire k, Jacques donne k euros à Isabelle. Déterminer l'espérance de gain de Jacques.

Exercice 179. 1185 rms 2021 PSI, CCINP
On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant toutes deux la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & 1 \\ 0 & X_2(\omega) \end{pmatrix}$. II s'agit de déterminer la probabilité que $M(\omega)$ soit diagonalisable.

1. En développant de deux manières le polynôme $(1+X)^{2n}$, montrer l'égalité
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
2. Conclure

Exercice 180. 1191 rms 2021 PSI, IMT
Soit $f : t \mapsto \dfrac{t}{2-t^2}$.

1. Développer f en série entière, préciser le rayon de convergence.
2. Donner la loi d'une variable aléatoire X dont la fonction génératrice est f.
3. Calculer l'espérance de X.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \dfrac{X}{2}$.

Exercice 181. 1182 rms 2019 MP, IMT
Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.
2. Quelle est la probabilité que X soit paire ?

Exercice 182. 1183 rms 2019 MP, CCINP
Soient λ et μ dans $\mathbb{R}_+^*$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Déterminer, si $n \in \mathbb{N}$, la loi de X conditionnellement à l'événement $(X+Y=n)$

Exercice 183. 1184 rms 2019 MP, CCINP
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(X+Y=k)$.
2. Même question pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$.
3. En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer $\mathbb{P}(X+Y=Z)$.
4. Déterminer $\mathbb{P}(X+Y+Z=n)$.

CENTRALE avec PYTHON

Algèbre

Exercice 184. 958 rms 2019 MP, Centrale avec PYTHON

Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, (P, Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} |t|\, P(t)Q(t)\, dt$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Programmer une fonction `phi(P,Q)` renvoyant $\varphi(P, Q)$.
3. Montrer qu'il existe une unique suite orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n soit de degré n à coefficient dominant positif.
4. Programmer une fonction retournant P_n. Déterminer P_0, P_1, P_2, P_3, P_4. Tracer les graphes des fonctions polynomiales associées sur $[-1, 1]$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P_n est scindé à racines simples et que ses racines sont dans $]-1, 1[$.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines de P_n séparent celles de P_{n+1}

Exercice 185. 993 rms 2019 PSI, Centrale avec PYTHON

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par : $a_{j-1,j} = j-1$ et $a_{j+1,j} = n+1-j$ pour tout j, et dont tous les autres coefficients sont nuls.

1. Ecrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie A_{n+1}.
2. Déterminer avec Python les valeurs propres de A_{n+1}. Que peut-on conjecturer ?
3. Soit u l'endomorphismme de $\mathbb{R}_n[X]$ canoniquement associé à la matrice A_{n+1}. Montrer qu'il existe un polynôme Q ne dépendant pas de n tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = Q\,P' + nXP$
4. En déduire les éléments propres de u.
5. La matrice A_{n+1} est-elle diagonalisable ?

Exercice 186. 994 rms 2019 PSI, Centrale PYTHON

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynome caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? Préciser le module de ses valeurs propres.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2, u_1 = 3, u_2 = 8, u_3 = 4, u_4 = 11$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+5} = \frac{1}{5}(u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4})$.
   (a) Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et renvoie les $n+1$ premiers termes de cette suite.
   (b) Afficher sur un graphique les 25 premiers termes de la suite. Que peut-on conjecturer concernant la convergence de u_n ?
   (c) Réécrire la relation de récurrence à l'aide de la matrice A.
   (d) Montrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice d'un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques.
   (e) Trouver un vecteur non nul X tel que ${}^tA\,X = X$

Exercice 187. 1052 rms 2019 PC, Centrale avec PYTHON

Soit $A_n = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{1,j} = a_{n,j} = a_{j,1} = 1$, les autres coefficients étant nuls.

1. Donner le rang de A_n
2. Calculer à l'aide de Python les valeurs propres de A_n lorsque $n \in \{2, \ldots, 6\}$
3. Calculer $\operatorname{Tr}\left(A_n^2\right)$.
4. En déduire les valeurs propres de a_n.

Exercice 188. 1057 rms 2019 PC, Centrale avec PYTHON

Soit E l'ensemble des polynomes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1. Soient $(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{C}^n$, $A=\begin{pmatrix}0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0 & -a_{n-2}\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   Calculer le polynome caractéristique de A.
2. Soit $P(X)=(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\dots(X-\lambda_n)\in E$. On définit, pour $q\in\mathbb{N}^*$, $r_q(P)=(X-\lambda_1^q)(X-\lambda_2^q)\dots(X-\lambda_n^q)$.
   (a) Écrire une fonction PYTHON `r(q,P)` qui renvoie $r_q(P)$
   (b) Tester cette fonction pour quelques valeurs de $q\in\mathbb{N}^*$ et $P\in E$. Que peut-on conjecturer ?
   (c) Démontrer cette conjecture à l'aide de la première question.

Analyse

Exercice 189. 965 rms 2019 MP, Centrale avec PYTHON

Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}$

1. Calculer u_n pour $n\leqslant 10$, représenter u_n pour $n\leqslant 100$. Que peut-on conjecturer ?
2. Démontrer la conjecture précédente.
3. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{\binom{n}{k}}=\frac{n\,u_n}{2}$

Exercice 190. 966 rms 2019 MP, Centrale avec PYTHON

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note s_n la somme des chiffres de n (en base 10) et t_n le nombre de 0 terminant l'écriture décimale de n.

1. Écrire deux fonctions Python renvoyant s_n et t_n. Tracer $\sum t_nx^n$ et $\sum s_nx^n$ pour $x\in\left[-\frac{9}{10},\frac{9}{10}\right]$ en tronquant la somme à l'ordre 10, 20, 100, ...
2. Montrer que $\sum t_nx^n$ et $\sum s_nx^n$ ont un rayon de convergence égal à 1.
3. Exprimer $T(x)$ en fonction de $T\left(x^{10}\right)$. Exprimer $S(x)$ en fonction de $S\left(x^{10}\right)$.

Exercice 191. 971 rms 2019 MP, Centrale avec PYTHON

On définit deux suites en posant : $x_0=0$, $y_0=0$, et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=\sqrt{7-y_n}$ et $y_{n+1}=\sqrt{7+x_n}$.

1. Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
2. Calculer avec Python les 20 premiers termes de ces suites et conjecturer leur limite.
3. On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Calculer leur limite.
4. On pose $K=\left[0,\sqrt{7}\right]\times\left[0,\sqrt{7+\sqrt{7}}\right]$ et on définit $f:K\to K,(x,y)\mapsto\left(\sqrt{7-y},\sqrt{7+x}\right)$. Montrer que f est $k-$lipschitzienne, avec $k<1$, pour la norme $\|.\|_1$. En déduire que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. On note l_x et l_y leurs limites respectives.
5. Déterminer $n_0\in\mathbb{N}$ tels que pour tout $n\geqslant n_0$, $|l_x-x_n|\leqslant 10^{-3}$ et $|l_y-y_n|\leqslant 10^{-3}$. Vérifier à l'aide de Python.
6. Montrer que les suites ne sont pas monotones.

Exercice 192. 979 rms 2019 MP, Centrale avec PYTHON

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note s_n la somme des chiffres de n (en base 10) et t_n le nombre de 0 terminant l'écriture décimale de n. Par exemple $t_{1004270}=1$ et $s_{1004270}=1$. On note $T(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}t_n\,z^n$ et $S(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}s_n\,z^n$

1. Écrire deux fonctions Python renvoyant s_n et t_n.
2. Tracer les sommes partielles de T et S pour $n\in\{10,20,\dots,100\}$ sur $\left[-\frac{9}{10},\frac{9}{10}\right]$.

   Étudier la parité de T.
3. Déterminer le rayon de convergence de T et de S.
4. On considère dans cette question S comme fonction d'une variable réelle. Quelle est sa limite en 1^- ?
5. Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, on a : $(1-z)\,S(z)=-9T(z)+\dfrac{z}{1-z}$.
6. Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, on a : $T(z)=\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{z^{10^p}}{1-z^{10^p}}$.
7. On considère de nouveau S comme fonction d'une varialbe réelle. Quelle est sa limite en -1^+ ?.

Probabilités

Exercice 193. 127 odlt 16/17 MP, Centrale Python

Pour $n \geqslant 2$, on note $A_0, \ldots, A_{n-1}$ les points dont les affixes sont les racines $n-$ièmes de l'unité. On cherche à compter le nombre d'ensembles X de segments 2 à 2 disjoints, non réduits à un point et dont les A_k sont les extrémités ; par exemple, pour $n = 3$, il y a 4 ensembles X : $\emptyset$, $\{[A_0, A_1]\}$, $\{[A_0, A_2]\}$, $\{[A_2, A_1]\}$.
On note M_n le nombre d'ensembles de segments ; par exemple $M_3 = 4$.

1. Déterminer M_4 et M_5 (il est fortement conseillé de faire des dessins)
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, M_{n+1} = M_n + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{n-1-i}$.
3. En déduire un algorithme qui permet de calculer les M_n
4. Conjecturer $M_n \leqslant 3^n$ pour $n \leqslant 20$.
   On admet que cette inégalité est vraie pour tout n.
5. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \dfrac{1}{3}$, $\sum M_n z^n$ converge.
6. On note $M(z)$ la somme de $\sum M_n z^n$. Montrer que $\forall z \in \left]-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right[$, $M(z) = 1 + zM(z) + z^2 M(z)^2$
7. En déduire $M(z)$ pour $z \in \left]-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right[$ puis une expression de M_n.

Exercice 194. 1044 rms 2019 PSI, Centrale avec PYTHON

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$, dont la loi jointe est donnée par : $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{c\, e^{-i}}{j^2 + 3j + 2}$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$

1. Déterminer la constante c.
2. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
3. Déterminer la loi de Y.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Soit $Z = 5X + 7Y$. Proposer une fonction en Python permettant de calculer $\mathbb{P}(Z = n)$ puis une fonction calculant la matrice colonne $(\mathbb{P}(Z = j))_{0 \leqslant j \leqslant n}$.
6. Montrez que $\mathbb{P}(Z = n) > 0$ pour tout $n > 23$.