Programme de Colle - Semaine n° 01

Du 18 septembre 2023 au 22 septembre 2023

Ce programme est constitué de points déjà abordés en première année, avec ponctuellement quelques compléments

Rappels concernant les suites de réels ou de complexes

Suites dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- ✎ Suites bornées, suites convergentes. Opérations sur les suites convergentes et leurs limites.
- ✎ Suite extraites, **théorème de Bolzano-Weierstrass**
- ✎ Relations de comparaison : O, o et $\sim$.

Propriétés spécifiques aux suites dans $\mathbb{R}$

- ✎ Suites divergentes vers l'infini.
- ✎ Suites monotones, théorème de la limite monotone.
- ✎ **Suites adjacentes : définition et théorème de convergence**
- ✎ Théorème de convergence par encadrement (des gendarmes)
- ✎ Théorème de prolongement des inégalités.
- ✎ Si $A \subset \mathbb{R}$ est non vide et majorée, $\sup(A)$ est limite d'une suite de points de A.
- ✎ $A \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si tout réel est limite d'une suite de points de A.
- ✎ Exemples d'études de suites explicites ($u_n = f(n)$), de suites récurrentes ($u_{n+1} = f(u_n)$), de **suites arithmético-géométriques, de suites récurrentes linéaires doubles**

Séries de réels ou de complexes

Généralités

- ✎ Série, terme général, somme partielle, série convergente, somme et restes partiels.
- ✎ *Exemples* : **séries géométriques complexes et séries "télescopiques"**.
- ✎ Condition nécessaire de convergence : le terme général tend vers 0. Grossière divergence.
- ✎ $\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum u_n \text{ converge}\right\}$ est un espace vectoriel et l'application qui à un élément de cet ensemble associe sa somme est une application linéaire.
- ✎ Série absolument convergence. La convergence absolue entraine la convergence.

Séries à termes réels positifs

- ✎ Critère de convergence : les sommes partielles sont majorées. Exemple : Séries de Riemann
- ✎ Comparaison par majoration : si $u_n \leqslant v_n$, $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge. Dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.
- ✎ **Comparaison par domination ou prépondérance** :
  si $u_n = O(v_n)$ ou si $u_n = o(v_n)$, $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.
- ✎ **Comparaison par équivalence** : Si $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum v_n$ converge.

Comparaison des restes partiels ou sommes partielles de séries

: u_n et v_n sont positifs. On note $S_n(u)$ la somme partielle et $R_n(u)$ le reste partiel (s'il existe) de la série $\sum u_n$.

- ✎ Si $u_n = O(v_n)$, $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.
  - ✔ En cas de convergence des deux séries : $R_n(u) = O(R_n(v))$
  - ✔ En cas de divergence des deux séries : $S_n(u) = O(S_n(v))$
- ✎ Si $u_n = o(v_n)$, même comparaison en remplaçant O par o.
- ✎ Si $u_n \sim v_n$, $\sum v_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum u_n$ converge.
  - ✔ En cas de convergence des deux séries : $R_n(u) \sim R_n(v)$
  - ✔ En cas de divergence des deux séries : $S_n(u) =\sim S_n(v)$

Comparaison avec une intégrale

Si f est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

✎ La série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$ converge.

✎ $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

Série alternée

✎ **Règle de Leibniz** (ou "critère spécial des séries alternées") : si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit et converge vers 0, $\sum (-1)^n v_n$ converge.

✎ Pour une série alternée respectant les conditions de la règle de Leibniz, le reste partiel est du signe et est, en valeur absolue, majoré par le premier terme.

✎ Exemples d'utilisation de développements limités lorsqu'un équivalent alterné ne permet pas de conclure

Exercices et Questions de cours

1. Un des points en gras ci-dessus
2. **BANQUE CCP MP 1**
   (a) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
   Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
   (b) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
3. Comparaison avec une intégrale : Si f est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. La série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$ converge et $\sum f(n)$ converge sssi la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente
4. Existence d'un réel γ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ (Constante d'Euler)
5. Règle de d'Alembert
6. Règle de Leibniz (CSSA)
7. Théorème de Césaro
8. Séries de Riemann
9. **BANQUE CCP MP 46**
   On considère la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.
   (a) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
   (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?
10. **BANQUE CCP MP 5**
    (a) On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
       i. **Cas $\alpha \leqslant 0$**
       En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
       ii. **Cas $\alpha > 0$**
       Étudier la nature de la série.
       Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.
    (b) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Prochain programme : Familles sommables. Algèbre