

## Programme de Colle - Semaine n° 03

*Du 02 octobre 2023 au 06 octobre 2023*

*Ce programme est constitué de points déjà abordés en première année, avec ponctuellement quelques compléments*

### Séries de réels ou de complexes

Tout type d'exercices

### Familles sommables

- ⇒ Familles sommables de réels positifs : définition, opérations
- ⇒ Sommation par paquets, théorème de Fubini. Cas des séries doubles.

### Structures algébriques usuelles

#### Groupes

Rappel

#### Anneaux et corps

- ⇒ Anneaux, produit fini d'anneaux, sous-anneaux, morphisme d'anneaux, noyau et image d'un morphisme d'anneau. Calculs dans un anneau (formule du binôme, identité  $a^n - b^n$ )
- ⇒ Groupe des inversibles d'un anneau.
- ⇒ Anneau intègre, corps, sous-corps

#### Idéaux et divisibilité

- ⇒ Idéaux d'un anneau commutatif, le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal. Somme et intersection d'idéaux.
- ⇒ Idéal engendré par un élément
- ⇒ Divisibilité dans un anneau intègre.  $x \mid y \iff yA \subset xA$
- ⇒ Idéaux de  $\mathbb{Z}$
- ⇒ Groupe des inversibles d'un anneau.
- ⇒ Anneau intègre, corps, sous-corps

#### Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et arithmétique dans $\mathbb{Z}$

- ⇒ Anneau  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ . Inversibles de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un corps ssi  $n$  est un nombre premier.
- ⇒ Théorème chinois : pour  $n \wedge m = 1$ ,  $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ . Applications aux systèmes de congruence.
- ⇒ Fonction indicatrice d'Euler  $\varphi$ . Calcul de  $\varphi(n)$  pour  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_q^{\alpha_q}$ .
- ⇒ Théorème d'Euler, petit théorème de Fermat.
- ⇒ Arithmétique dans  $\mathbb{Z}$ , Lien avec les idéaux.

#### Anneau $\mathbb{K}[X]$ et arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

- ⇒ Idéaux de  $\mathbb{K}[X]$ .
- ⇒ Relation de Bezout, lemme de Gauss.
- ⇒ Polynômes irréductibles.

#### Algèbre

- ⇒ Algèbre, sous-algèbre, morphismes d'algèbres.
- ⇒ Sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  engendré par un élément :  $\mathbb{K}[u]$
- ⇒ Lemme de décomposition des noyaux.
- ⇒ Idéal annulateur d'un endomorphisme, polynome minimal d'un endomorphisme
- ⇒ Sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  engendré par un élément :  $\mathbb{K}[A]$
- ⇒ Idéal annulateur d'une matrice, polynome minimal d'une matrice.

## Exercices et Questions de cours

1. Une suite d'entiers convergente est stationnaire
2. Image directe et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe
3. Montrer que  $\forall n \geq 0, \frac{1}{\operatorname{ch}(2n+1)} = \sum_{q=0}^{\infty} 2(-1)^q e^{-(2n+1)(2q+1)}$   
 En déduire que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{sh}(2n+1)}$
4. Groupe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  : définition, cyclicité, générateurs
5. Théorème de Lagrange (sur le cardinal des sous-groupes)
6. Existence d'un réel  $\gamma$  tel que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$  (Constante d'Euler)
7. Idéaux de  $(\mathbb{Z}, +, \times)$
8. Idéaux de  $(\mathbb{K}[X], +, \times)$
9.  $\bar{k}$  est inversible dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ssi  $k \wedge n = 1$
10.  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un corps ssi  $n$  est premier
11. Fonction indicatrice d'Euler : définition, propriété...
12. Théorème chinois
13. Lemme de décomposition des noyaux

### 14. BANQUE CCP MP 86

Soit  $p$  un nombre premier.

- (a) i. Soit  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ . Prouver que si  $p \wedge a = 1$  et  $p \wedge b = 1$ , alors  $p \wedge (ab) = 1$ .  
 ii. Prouver que  $\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ ,  $p$  divise  $\binom{p}{k} k!$  puis que  $p$  divise  $\binom{p}{k}$ .
- (b) i. Prouver que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \pmod{p}$ . **Indication** : Procéder par récurrence.  
 ii. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, p$  ne divise pas  $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

### 15. BANQUE CCP MP 94

- (a) Énoncer le théorème de Bézout dans  $\mathbb{Z}$ .
- (b) Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels premiers entre eux.  
 Soit  $c \in \mathbb{N}$ .  
 Prouver que :  $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$ .
- (c) On considère le système  $(S) : \begin{cases} x \equiv 6 \pmod{17} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases}$  dans lequel l'inconnue  $x$  appartient à  $\mathbb{Z}$ .  
 i. Déterminer une solution particulière  $x_0$  de  $(S)$  dans  $\mathbb{Z}$ .  
 ii. Déduire des questions précédentes la résolution dans  $\mathbb{Z}$  du système  $(S)$ .

Prochain programme : Algèbre