Programme de Colle - Semaine n^o 05
Du 16 octobre 2023 au 20 octobre 2023

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él ‘eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d’une semaine à l’autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"B"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B**.
Remarque : La note pour un membre du groupe B ne pourra pas dépasser 14
Pour compléter la question de cours, on pourra demander l’énoncé précis d’un résultat ou d’une définition, y compris lorsqu’il ne s’agit pas d’une question du groupe correspondant.

Structures algébriques usuelles

Groupes, anneaux, corps, Idéaux, divisibilité, algèbre

Rappel.

Algèbre linéaire

Espaces vectoriels

- ✎ Espace vectoriel, sous-espace vectoriel. Intersection, produit, somme de sous-espaces vectoriels. Somme directe de sous-espaces vectoriels, sous-espaces supplémentaires. Sous-espaces affines

Applications linéaires

- ✏ Application linéaire, images directe et réciproque de sous-espaces par une application linéaire. Noyau, Image.
- ✏ Détermination d’une application linéaire par ses restrictions sur chaque composant d’une somme directe
- ✏ Projecteur, symétrie. Caractérisations.

Familles de vecteurs

- ✏ Combinaisons linéaires, sous-espace engendré par une partie
- ✏ Famille génératrice (finie ou non), famille libre (finie ou non). Base.
- ✏ Caractérisation d’une application linéaire par les images des vecteurs d’une base.

Dimension

- ✏ Definition, théorème de la base incomplète. Caractérisation des bases. Dimension d’un sous-espace vectoriel. Formule de Grassmann. Théorème du rang. Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Formes linéaires et hyperplans, Equations linéaires

- ✏ Formes linéaires, dual. Hyperplans. Dimension en dimension finie. Equations linéaires : ensemble des solutions

Matrices

- Matrices, matrices carrées, Base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Produit de matrices, matrices inversibles. Matrice d'une application linéaire. Formules de changement de bases, Matrices équivalentes, matrices semblables.
- Rang d'une matrice. Matrice par blocs : produit de matrices par blocs. Trace d'une matrice, trace d'un endomorphisme.

Déterminant

- Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme, d'une matrice
- Calcul de déterminants par : méthode du pivot ou développement selon une rangée
- Déterminant, déterminants tridiagonaux

Réduction des endomorphismes

Eléments propres

- Sous-espaces stables par u, endomorphisme induit
- Vecteurs propres, valeurs propres, spectre, sous-espaces propres

Polynome caractéristique

- Polynome caractéristique, multiplicité des valeurs propres, polynome caractéristique d'un endomorphisme induit
- Théorème de Cayley-Hamilton (admis). Conséquences sur le polynome minimal

Diagonalisation

- Diagonalisabilité d'un endomorphisme, d'une matrice
- Caractérisation de la diagonalisabilité
- Quelques applications de la diagonalisabilité : calcul de puissances, de l'exponentielle de matrices (limite d'une suite de matrice étant définie par la limite des coordonnées)

Exercices et Questions de cours

1. **TOUS** Idéaux de $(\mathbb{K}[X],+,\times)$
2. Fonction indicatrice d'Euler
3. **TOUS** Caractérisation des projecteurs par l'idempotence
4. En dimension finie, le spectre de u est égal à l'ensemble des zéros de π_u
5. Théorème chinois
6. **TOUS** Lemme de décomposition des noyaux
7. Interpolation de Lagrange : expression des coordonnées dans la base de Lagrange
8. **TOUS** Déterminant de Vandermonde
9. Application trace. $tr(AB) = tr(BA)$
10. **Groupe B** Si H est une matrice carrée de rang 1, $H^2 = tr(H)\,H$
11. BANQUE CCP 62
    Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
    Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \mathrm{Id}$.

(a) Démontrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\ f$.
(b) Démontrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\ g$.
(c) Démontrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im}\ g$.

12. **TOUS** BANQUE CCP 64
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.
   (a) Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
   (b) i. Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \ker f = \ker f^2$.
   ii. Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f$.

13. BANQUE CCP 90
$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.
   (a) Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   (b) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\},\ L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   i. Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   ii. Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
   (c) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
   (d) *Application :* On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$.
   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

14. **TOUS** BANQUE CCP 91
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
   (b) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
   (c) Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Prochain programme : Reduction

GROUPES DE COLLES
Groupe B : classés par ordre croissant des groupes de colles
G 2 : Taffin , **G 4** : Arar , Munir , **G 5** Le Bris , **G 6 : Tous** Jacquin , Pohu , Ribes , **G 7** Queinnec
G 8 Tous Ballatore , Niangoran , Polydore , **G 9** Verdin , **G 10** Clautrier , Laurent , **G 12** Dathevy
G 13 Foulon , Chaumont , **G 14** Plessis, Varennes , **G 15** Briard
Groupe A : les autres