Programme de Colle - Semaine n^o 06

Du 06 novembre 2023 au 10 novembre 2023

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él ‘eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"B"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B**.
Remarque : La note pour un membre du groupe B ne pourra pas dépasser 14
Pour compléter la question de cours, on pourra demander l'énoncé précis d'un résultat ou d'une définition, y compris lorsqu'il ne s'agit pas d'une question du groupe correspondant.

Algèbre linéaire

Rappel

Réduction des endomorphismes

Eléments propres

- ✏ Sous-espaces stables par u, endomorphisme induit
- ✏ Vecteurs propres, valeurs propres, spectre, sous-espaces propres

Polynome caractéristique

- ✏ Polynome caractéristique, multiplicité des valeurs propres, polynome caractéristique d'un endomorphisme induit
- ✏ Théorème de Cayley-Hamilton (admis). Conséquences sur le polynome minimal

Diagonalisation

- ✏ Diagonalisabilité d'un endomorphisme, d'une matrice
- ✏ Caractérisation de la diagonalisabilité
- ✏ Quelques applications de la diagonalisabilité : calcul de puissances, de l'exponentielle de matrices (limite d'une suite de matrice étant définie par la limite des coordonnées)

Trigonalisation

- ✏ Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme à polynome caractéristique scindé : leur somme est directe et vaut l'espace tout entier.
- ✏ Trigonalisabilité d'un endomorphisme, d'une matrice
- ✏ Caractérisation de la trigonalisabilité
- ✏ Endomorphismes nilpotents

Exercices et Questions de cours

1. **TOUS** Lemme de décomposition des noyaux
2. **TOUS** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
   Montrer que A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.
3. En dimension finie, le spectre de u est égal à l'ensemble des zéros de π_u
4. Caractérisation des projecteurs par l'idempotence
5. A est diagonalisable si et seulement si l'idéal annulateur de A contient un polynôme scindé à racines simples de $\mathbb{K}[X]$.
6. Interpolation de Lagrange : expression des coordonnées dans la base de Lagrange
7. **TOUS** Déterminant de Vandermonde
8. Application trace. $tr(AB) = tr(BA)$
9. **Groupe B** Si H est une matrice carrée de rang 1, $H^2 = tr(H)\, H$
10. **TOUS** BANQUE CCP 91
    On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
    (a) Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
    (b) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
    (c) Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
    (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

11. **TOUS** BANQUE CCP 73

    On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

    (a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
    (b) Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
    En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, A)$.

12. BANQUE CCP 64
    Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.
    (a) Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
    (b) i. Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \ker f = \ker f^2$.
    ii. Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f$.
13. BANQUE CCP 90
    $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
    Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

    (a) Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
    (b) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\},\ L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

    i. Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
    ii. Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

(c) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

(d) *Application :* On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.

Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Prochain programme : **Espaces vectoriels normés**

GROUPES DE COLLES (Rem : des changements seront possibles avant le 03 novembre)
Groupe B : classés par ordre croissant des groupes de colles
G 2 : Taffin , **G 4** : Arar , Munir , **G 5** Le Bris , **G 6 : Tous** Jacquin , Pohu , Ribes , **G 7** Queinnec
G 8 Tous Ballatore , Niangoran , Polydore , **G 9** Verdin , **G 10** Claustrier , Laurent , **G 12** Dathevy
G 13 Foulon , Chaumont , **G 14** Plessis, Varennes , **G 15** Briard
Groupe A : les autres